Capitolo I
I numeri reali

1 Preliminari

Le scienze matematiche partono dal concetto di numero il quale, nel corso dei tempi, ha subito successivi ampliamenti, cioé sono state via via introdotte le classi dei: numeri naturali, numeri interi, numeri razionali, numeri reali, numeri complessi. Questi ampliamenti successivi sono dovuti principalmente:

a) ad una esigenza aritmetica, nel senso che quando nell'ambito di una classe di numeri non ha significato una data operazione aritmetica, si cerca di ampliare quella classe introducendo nuovi numeri che consentono di rimuovere le eccezioni riguardanti le operazioni;

b) ad una esigenza geometrica, nel senso di rendere misurabili grandezze che tali non sono nella classe dei numeri in cui si sta operando.

Le classi numeriche man mano introdotte, sono tali che ciascuna di esse è contenuta in tutte quelle successive in quanto gli ampliamenti suddetti vengono fatti in modo da mantenere le proprietà formali di cui godono le operazioni; in definitiva le operazioni aritmetiche introdotte via via per le classi più ampie dovranno possedere le proprietà già verificate nelle classi più ristrette.

La prima classe di numeri introdotta è quella dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$. I numeri naturali furono introdotti al fine di contare gli oggetti componenti un insieme; sono poi state definite le operazioni che con essi si potevano eseguire e le relative proprietà. Alla classe dei numeri naturali si suole aggiungere lo zero il quale esprime il numero di elementi contenuti nell'insieme vuoto. Questa nuova classe si indica con $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$. L'estensione della classe dei numeri naturali è dovuta all'esigenza di poter dare significato all'operazione di sottrazione senza eccezione. Viene introdotta, quindi, la classe dei numeri interi (o relativi) $\mathbb{Z}$=$\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$. L'estensione della classe dei numeri interi è dovuta all'esigenza di poter dare significato all'operazione di divisione senza eccezione (rimane esclusa sempre, anche nei successivi ampliamenti, la divisione per 0). Viene introdotta così la classe dei numeri razionali $\mathbb{Q}$=$\{\frac{m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0\}$. Vi sono due problemi fondamentali che non ricevono completa sistemazione in $\mathbb{Q}$:

a) è noto che nella geometria esistono grandezze commensurabili (ad esempio due segmenti α, β per i quali esiste un razionale tale che $\beta = \frac{m}{n}\alpha$ e $\frac{m}{n}$ è la misura di β rispetto ad α presa come unità di misura) ed esistono grandezze incommensurabili (ad esempio coppie di segmenti che non ammettono un multiplo comune: il lato e la diagonale di un quadrato);

b) esistono numeri razionali che non sono potenze n-esime perfette (per esempio non esiste nessun razionale q tale che $q^2 = 2$).

La sistemazione di questi due problemi sarà possibile con l'introduzione dei numeri reali $\mathbb{R}$. La loro definizione si può dare in vari modi. Ad esempio sapendo che i numeri razionali, oltre che sotto forma di frazione, si possono rappresentare mediante una rappresentazione decimale finita o periodica (cioè a partire da una certa posizione decimale in poi, un blocco finito di cifre si ripete indefinitamente) e viceversa, ogni numero decimale finito o periodico si può rappresentare attraverso una frazione di numeri interi, cioè attraverso un numero razionale, è possibile definire l'insieme dei numeri reali come l'insieme di tutti i numeri decimali, finiti e infiniti, periodici e non. I numeri decimali che hanno uno sviluppo illimitato e non periodico si dicono irrazionali.

2 Proprietà dei numeri reali

Elenchiamo ora le proprietà del sistema dei numeri reali che lo caratterizzano e, come vedremo, lo distinguono anche dall'insieme dei razionali. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali forma quello che si chiama un campo ordinato completo. Le proprietà del sistema dei numeri reali sono di tre categorie:

- proprietà algebriche, riguardanti le operazioni che si possono eseguire sui numeri reali;
- proprietà di ordinamento, legate alla possibilità di confrontare fra loro i numeri reali per identificarne il maggiore;
- proprietà di completezza, che euristicamente sono legate all'idea che vi debbano essere "abbastanza numeri" per rappresentare una grandezza che varia "con continuità", quale il tempo o la posizione di un punto su di una retta.

- Proprietà algebriche

  Nell'insieme dei numeri reali sono definite due operazioni, dette somma $(+)$ e prodotto $(\cdot)$, tra numeri reali con le seguenti proprietà:

◦ Proprietà associativa

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \qquad (a+b)+c = a+(b+c) \qquad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

◦ Proprietà commutativa

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad a+b = b+a \qquad a\cdot b = b\cdot a$$

◦ Proprietà distributiva

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \qquad (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

◦ Esistenza elementi neutri

$$\exists 0 \in \mathbb{R} \;:\; \forall a \in \mathbb{R} \quad a+0 = a \qquad \exists 1 \in \mathbb{R} \;:\; \forall a \in \mathbb{R} \quad a\cdot 1 = a$$

◦ Esistenza opposti

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \exists\,(-a) \in \mathbb{R} \;:\; a+(-a) = 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \;:\; a\cdot a^{-1} = 1$$

• Proprietà di ordinamento

Sull'insieme $\mathbb{R}$, verificante le proprietà algebriche esposte, è definita una relazione di minore o uguale $\leq$ tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

◦ Riflessiva

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad a \leq a$$

◦ Antisimmetrica

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad \text{se risulta} \quad a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq a \qquad \text{allora} \quad a = b$$

◦ Dicotomia

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad \text{risulta} \quad a \leq b \quad \text{oppure} \quad b \leq a$$

◦ Transitiva

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{se risulta} \quad a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq c \qquad \text{allora} \quad a \leq c$$

◦ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \;:\; a \leq b \quad \Rightarrow \quad a+c \leq b+c$

◦ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \;:\; a \leq b \quad c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a\cdot c \leq b\cdot c$

- Proprietà di completezza

  Sull'insieme $\mathbb{R}$, sul quale sono definite le operazioni $+$ e $\cdot$ e la relazione $\leq$ verificanti le proprietà sopra esposte, vale il seguente assioma di completezza:

◦ Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che

$$a \leq b \qquad \forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B.$$

Allora esiste almeno un numero reale c tale che

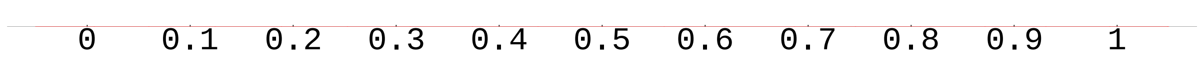
$$a \leq c \leq b \qquad \forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B.$$

L'assioma di completezza è la proprietà che caratterizza i numeri reali e li distingue dai numeri razionali. Infatti è ovvio che $\mathbb{Q}$ soddisfa le proprietà algebriche e quelle dell'ordinamento, ma non soddisfa l'assioma di completezza. Vediamolo con un esempio. Consideriamo i due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ così definiti

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \,|\, a^2 \leq 2\} \qquad B = \{b \in \mathbb{Q} \,|\, b^2 \geq 2 \quad b > 0\}.$$

E' evidente che $a \leq b \quad \forall\, a \in A \quad$ e $\quad \forall\, b \in B$. In base all'assioma di completezza, esiste un numero reale c tale che $a \leq c \leq b \quad \forall\, a \in A \quad$ e $\quad \forall\, b \in B$. Tale numero, che si può dimostrare essere unico, ha la proprietà che $c^2 = 2$ e si denota con $c = \sqrt{2}$. Tale numero non è un razionale. Infatti, se così non fosse, esso si potrebbe esprimere nella forma $\frac{m}{n}$ con m e n interi primi tra loro. Si avrebbe così $m^2 = 2\,n^2$, da cui segue che m^2 è pari e tale sarà anche m. Si può quindi scrivere $m = 2\,k$ con k intero. Ma allora si avrebbe $4\,k^2 = 2\,n^2$ e quindi $n^2 = 2\,k^2$. Con lo stesso ragionamento di prima si conclude che n è pari, contro l'ipotesi che m e n fossero primi tra loro. Dunque $\sqrt{2}$ non è razionale.

I numeri reali possono anche essere rappresentati su di una retta orientata, chiamata retta reale. Scelto lo 0 come origine e un verso di percorrenza, si individuano dapprima gli interi $\mathbb{Z}$ indicando la scala. Successivamente il segmento di estremi 0 e 1 (o in generale di estremi m e $m+1$ con $m \in \mathbb{Z}$), contiene i punti corrispondenti ai decimi a cui possono essere intercalati i centesimi, i millesimi, e così via (Fig.1). I "buchi" sulla retta reale vengono colmati dai numeri irrazionali. L'assioma di completezza, in questa rappresentazione geometrica, è l'analogo del postulato di continuità della retta di Euclide.



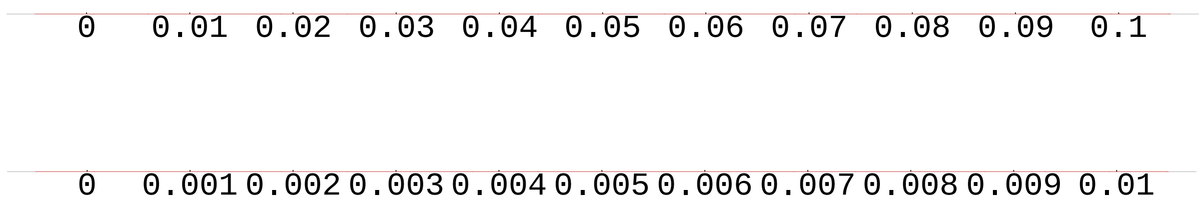


Figura 1

Le proprietà dei numeri reali hanno varie conseguenze, tutte strumenti essenziali per il calcolo matematico. Dalle proprietà algebriche seguono le seguenti regole di calcolo:

i) Regola di semplificazione rispetto alla somma: $a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c$

ii) Regola di semplificazione rispetto al prodotto: $a \cdot b = a \cdot c \quad \text{e} \quad a \neq 0 \;\Rightarrow\; b = c$

iii) Il prodotto tra due numeri è nullo quando almeno uno dei due fattori è nullo:
$a \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0$

iv) $\forall\, a \in \mathbb{R} \quad -(-a) = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (a^{-1})^{-1} = a$

v) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

vi) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Per quanto riguarda le proprietà dell'ordinamento, abbiamo visto che esse si riferiscono alla relazione di minore uguale ($\leq$) tra coppie di numeri reali. La relazione di maggiore o uguale ($\geq$) è ricondotta alla precedente mediante la definizione $a \geq b \;\Leftrightarrow\; b \leq a$. In questo modo la relazione $\geq$ gode di proprietà analoghe a quelle della relazione $\leq$. Infine è possibile definire altre due relazioni, quella di minore ($<$) e quella di maggiore ($>$) ponendo

$$a < b \;\Leftrightarrow\; a \leq b \quad \text{e} \quad a \neq b \qquad\qquad a > b \;\Leftrightarrow\; a \geq b \quad \text{e} \quad a \neq b$$

Dalle proprietà d'ordine discendono le seguenti conseguenze:

i) $a \leq b \;\Rightarrow\; b - a \geq 0$

ii) $a \leq 0 \;\Rightarrow\; -a \geq 0$

iii) $a > 0 \;\Rightarrow\; a^{-1} > 0$

iv) $a \leq b \quad \text{e} \quad c \leq 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \geq b \cdot c$

v) $\forall\, a \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ a^2 \geq 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R} \setminus 0 \ \Rightarrow \ a^2 > 0$

3 Estremi di un insieme numerico

Sia A un insieme di numeri reali.

Definizione 3.1 *Diremo che A è dotato di massimo se esiste un numero M dell'insieme A che è maggiore o uguale ad ogni altro elemento di A, cioè se $\exists\, M \in A \ : \ M \geq a \quad \forall\, a \in A$.* •

Definizione 3.2 *Diremo che A è dotato di minimo se esiste un numero m dell'insieme A che è minore o uguale ad ogni altro elemento di A, cioè se $\exists\, m \in A \ : \ m \leq a \quad \forall\, a \in A$.* •

Teorema 3.3 *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Se esistono, il massimo e il minimo di A sono unici.*

Dimostrazione - Proviamo solo l'unicità del massimo in quanto quella del minimo viene eseguita con la stessa tecnica. Siano M_1 e M_2 due elementi di A soddisfacenti la definizione di massimo. Allora:

$$M_1 \geq a \quad \forall\, a \in A \qquad \text{e} \qquad M_2 \geq a \quad \forall\, a \in A$$

In particolare scegliendo $a = M_2$ nella prima e $a = M_1$ nella seconda disuguaglianza, otteniamo le due relazioni $M_1 \geq M_2 \quad \text{e} \quad M_2 \geq M_1$. Si deduce quindi che $M_1 = M_2$. •

E' chiaro che non tutti gli insiemi sono dotati di massimo o di minimo. Ad esempio, considerato l'insieme $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$, si verifica facilmente che 1 è il massimo di A, ma l'insieme A non è dotato di minimo (l'elemento 0 non è un elemento di A in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $\frac{1}{n} > 0$). Il numero 0, pur non appartenendo all'insieme A, ha la proprietà di essere più piccolo di ogni elemento di A.

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. In questo caso $\mathbb{N}$ è dotato di minimo 1, ma non è dotato di massimo; in più non vi è nessun numero reale che sia maggiore o uguale di tutti i numeri naturali.

Questi due esempi suggeriscono il fatto che è necessario introdurre due nuove quantità, più generali del massimo e del minimo, in modo da poterle attribuire ad ogni insieme numerico.

Definizione 3.4 *Un numero reale L si dirà un maggiorante per l'insieme A, se L è maggiore o uguale di ogni elemento di A, cioè se* $L \geq a \quad \forall\, a \in A$. •

Definizione 3.5 *Un numero reale l si dirà un minorante per l'insieme A, se l è minore o uguale di ogni elemento di A, cioè se* $l \leq a \quad \forall\, a \in A$. •

E' chiaro che se un insieme A ammette un maggiorante (minorante) allora ne ammette infiniti. Basta infatti prendere un qualsiasi numero reale più grande (piccolo) del maggiorante (minorante).

Definizione 3.6 *Diremo che l'insieme A è limitato superiormente se ammette un maggiorante. Diremo invece che A è limitato inferiormente se ammette un minorante. Infine diremo che A è limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente, cioè se* $\exists\, l, L \in \mathbb{R} \;:\; l \leq a \leq L \quad \forall\, a \in A$. •

Nel primo degli esempi precedenti il numero 0 è un minorante per l'insieme A; nell'esempio dei naturali $\mathbb{N}$, l'insieme non ammette nessun maggiorante.

Abbiamo visto che se un insieme A è limitato superiormente (inferiormente) esso ammette infiniti maggioranti (minoranti). Ora l'insieme dei maggioranti (minoranti) dell'insieme A ha una caratteristica particolare: esso è dotato di minimo (massimo). Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 3.7 *Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente (inferiormente). Allora esiste il minimo (massimo) dell'insieme dei suoi maggioranti (minoranti).*

Dimostrazione - Indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di A. L'insieme B è non vuoto in quanto A è limitato superiormente. Dalla definizione di maggiorante segue che

$$a \leq b \qquad \forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B.$$

Dall'assioma di completezza segue che esiste un numero reale Λ tale che

$$a \leq \Lambda \leq b \qquad \forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B.$$

Dalla prima disuguaglianza segue che Λ è un maggiorante di A; dunque $\Lambda \in B$. Dalla seconda disuguaglianza segue che Λ è il minimo di B. (In maniera simile si prova che l'insieme dei minoranti di un insieme A limitato inferiormente è dotato di massimo) •

Questo teorema ci permette di dare altre due definizioni.

Definizione 3.8 *Sia A un insieme non vuoto limitato superiormente. Il minimo Λ dell'insieme dei maggioranti di A è chiamato estremo superiore di A ed è caratterizzato dalle seguenti proprietà:*

$$\Lambda = \sup A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \Lambda \geq a & \forall\, a \in A \\ \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, a \in A \quad : \quad \Lambda - \epsilon < a \end{cases} \quad \bullet$$

Definizione 3.9 *Sia A un insieme non vuoto limitato inferiormente. Il massimo λ dell'insieme dei minoranti di A è chiamato estremo inferiore di A ed è caratterizzato dalle seguenti proprietà:*

$$\lambda = \inf A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \lambda \leq a & \forall\, a \in A \\ \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, a \in A \quad : \quad \lambda + \epsilon > a \end{cases} \quad \bullet$$

Dunque se un insieme è limitato superiormente (inferiormente) esso è dotato di estremo superiore (inferiore) che è un numero reale. Cosa accade per gli insiemi non limitati superiormente o inferiormente? In questo caso è utile introdurre i simboli $+\infty$ e $-\infty$.

Definizione 3.10 *Sia A un insieme non limitato superiormente. In questo caso diremo che l'estremo superiore di A è $+\infty$. Dunque*

$$\sup A = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\, L \in \mathbb{R} \quad \exists\, a \in A \,:\, a > L \quad \bullet$$

Definizione 3.11 *Sia A un insieme non limitato inferiormente. In questo caso diremo che l'estremo inferiore di A è $-\infty$. Dunque*

$$\inf A = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\, l \in \mathbb{R} \quad \exists\, a \in A \,:\, a < l \quad \bullet$$

Con l'uso dei simboli $+\infty$ e $-\infty$, possiamo dunque associare ad ogni insieme non vuoto di numeri reali sia l'estremo superiore che l'estremo inferiore.

E' chiaro che se un insieme A è dotato di massimo (minimo) questo coincide con l'estremo superiore (inferiore). Negli esempi precedenti, 0 è l'estremo inferire di A, mentre 1, che è anche il massimo, è l'estremo superiore. Invece nell'esempio dei naturali $\mathbb{N}$, 1 è il minimo e quindi anche l'estremo inferiore, mentre l'estremo superiore di $\mathbb{N}$ è $+\infty$.

L'introduzione dei simboli $+\infty$ e $-\infty$ permette di definire in modo preciso alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, cioè quelli che corrispondono a segmenti o semirette sulla retta reale. In particolare chiameremo intervalli limitati di estremi a e b uno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervallo chiuso)

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervallo aperto)

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (intervallo aperto a destra e chiuso a sinistra)

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (intervallo chiuso a destra e aperto a sinistra)

Chiameremo invece intervallo non limitato di $\mathbb{R}$ uno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (intervallo non limitato a destra e chiuso a sinistra)

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (intervallo non limitato a destra e aperto a sinistra)

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ (intervallo non limitato a sinistra e chiuso a destra)

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ (intervallo non limitato a sinistra e aperto a destra)

Capitolo II
Funzioni reali

1 Funzioni e rappresentazione cartesiana

Il concetto intuitivo di funzione è quello di una legge di natura qualunque che ad ogni elemento di un insieme A associa in modo univoco un elemento di un insieme B. Consideriamo alcuni esempi:

a) L'area A di un cerchio dipende dal raggio r del cerchio stesso; la legge che lega r ad A è data da A$=\pi\, r^2$.

b) Lo spazio s percorso da un corpo in caduta libera dipende dal tempo di caduta t; la legge che lega t ad s è data da $s = \frac{1}{2}\, g\, t^2$ dove $g \simeq 9,81\, m/sec^2$ è l'accelerazione gravitazionale.

c) Il costo C di spedizione di una raccomandata dipende dal peso p della lettera; anche se non si dispone di una legge specifica che lega p e C, negli uffici postali è possibile reperire le regole che assegnano C in funzione di p.

Gli esempi precedenti descrivono un modo attraverso il quale un certo numero (r, t, p) ne determina un altro (A, s, C). In tutti questi casi diciamo che il secondo numero è funzione del primo.

Definizione 1.1 *Una funzione $f : A \to B$ è una legge che ad ogni elemento di un insieme A fa corrispondere uno ed un solo elemento, detto $f(x)$, di un insieme B.* •

Considereremo nel seguito funzioni per le quali gli insiemi A e B sono insiemi di numeri reali. L'insieme A è detto dominio o insieme di definizione della funzione. Il numero $y = f(x)$ è il valore di f in x. L'immagine di f è l'insieme di tutti i possibili valori assunti da $f(x)$ per x che varia nel dominio.

Il modo più comune per visualizzare una funzione è attraverso il suo grafico. Se f è una funzione di dominio A, allora il suo grafico è l'insieme di coppie ordinate $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. In altre parole il grafico di f consiste in tutti i punti (x, y) del piano tali che $y = f(x)$ e x è nel dominio di f. Il grafico di una funzione fornisce una rappresentazione molto utile dell'andamento della funzione stessa. Poiché la coordinata y del punto (x, y) di un grafico è $f(x)$, si deduce che il valore di $f(x)$ corrisponde all'altezza del grafico stesso in corrispondenza del punto x (Fig. 1). Il grafico permette inoltre di visualizzare il domino e l'immagine di f sull'asse x e sul'asse y rispettivamente (Fig. 2).

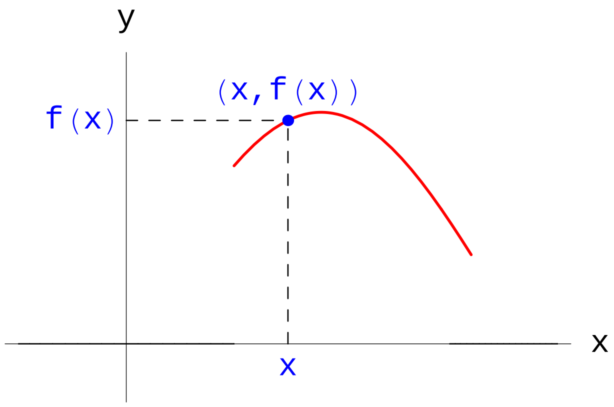


Fig. 1

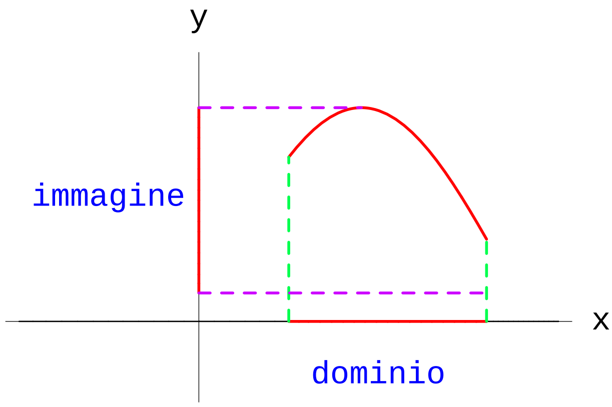


Fig. 2

Abbiamo visto che il grafico di una funzione è una curva nel piano. Ci si può chiedere quali curve nel piano sono grafici di funzioni di una variabile x. Una risposta è data dal seguente test:

- Test delle rette verticali: Una curva nel piano è il grafico di una funzione di x se e solo se nessuna retta verticale interseca il grafico più di una volta (Fig. 3 - Fig. 4).

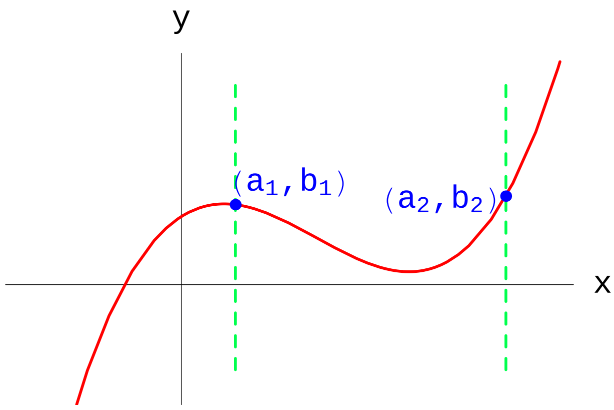


Fig. 3: La curva è grafico di una funzione

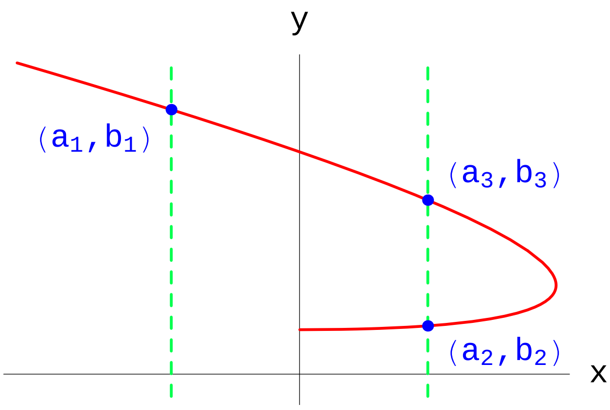


Fig. 4: La curva non è grafico di una funzione

Spesso accade che le funzioni godono di particolari tipi di simmetrie. Quella più comune riguarda i valori della funzione nei punti x e $-x$. Più precisamente supponiamo che $f : A \to B$ e l'insieme A sia tale che se $x \in A$ allora anche $-x \in A$.

Definizione 1.2 *Diremo che f è una funzione pari se accade che $f(-x) = f(x)\ \forall x \in A$. Diremo invece che f è una funzione dispari se accade che $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in A$.* •

Il significato geometrico di questa definizione è che per una funzione pari il grafico risulta simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (Fig. 5), mentre per una funzione dispari il grafico risulta simmetrico rispetto all'origine (Fig. 6).

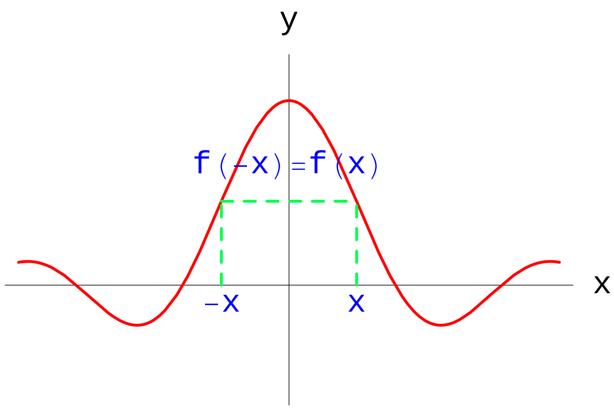


Fig. 5

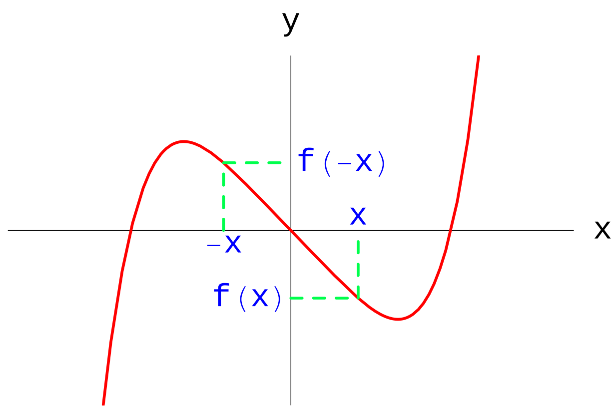


Fig. 6

2 Funzioni monotone e funzioni invertibili

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato alcuni esempi di funzione. L'esempio a) riguardava la funzione $A = \pi r^2$ che esprime l'area di un cerchio una volta noto il suo raggio. E' chiaro che cerchi con raggio superiore ammettono area più grande. Nell'esempio c) del costo di spedizione di una raccomandata, all'aumentare del peso della lettera il costo rimane invariato in certe regioni e aumenta quando si supera una certa soglia. Queste proprietà possono essere ben descritte attraverso il concetto di monotonia.

Definizione 2.1 *Sia $f : A \to B$ una funzione. diremo che:*

i) f è strettamente crescente $\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \ : \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2)$

ii) f è crescente $\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \ : \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)$

iii) f è strettamente decrescente $\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \ : \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)$

iv) f è decrescente $\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \ : \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geq f(x_2)$ •

Si dice che f è monotona quando verifica una delle precedenti realazioni. In particolare se verifica la condizione i) oppure la condizione iii) si dice che è strettamente monotona (Fig. 7 - Fig.8).

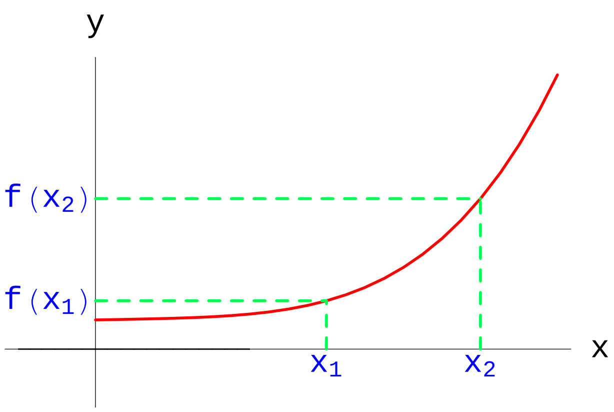


Fig. 7: Funzione strettamente crescente

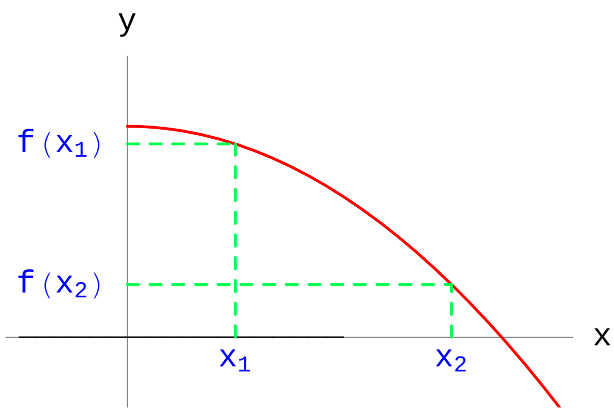


Fig. 8: Funzione strettamente decrescente

Negli esempi precedenti la funzione area è strettamente crescente, mentre la funzione costo di spedizione è semplicemente crescente.

Abbiamo visto che una funzione $f : A \longrightarrow B$ è una legge che associa ad ogni elemento di A un unico elemento di B. Ci si può chiedere se sia possibile che tutti gli elementi di B provengano, cioè siano immagine, di un elemento di A e se tale elemento sia unico.

Definizione 2.2 *Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione. Diremo che f è invertibile se per ogni $y \in B$ esiste ed è unico un $x \in A$ tale che $y = f(x)$. In questo caso diremo che tra gli insiemi A e B vi è una corrispondenza biunivoca.* •

E' chiaro che se f è una funzione invertibile, allora è possibile definire una nuova funzione, che si chiama funzione inversa e si denota con f^{-1}, che ad ogni elemento $y \in B$ associa quell'unico $x \in A$ per cui $y = f(x)$. Dunque f^{-1} è una funzione avente come dominio l'insieme B e come immagine l'insieme A ed è definita da

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y \qquad \forall\, y \in B.$$

Attraverso la rappresentazione grafica di una funzione, si può facilmente capire se una funzione è invertibile oppure no. Questa verifica può essere effettuata attraverso il seguente test:

- Test delle rette orizzontali: Una funzione è invertibile se nessuna retta orizzontale interseca il suo grafico in più di un punto (Fig. 9 - Fig. 10).

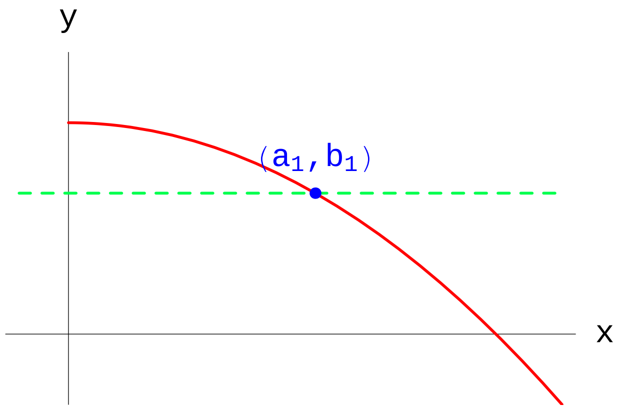


Fig. 9: La funzione è invertibile

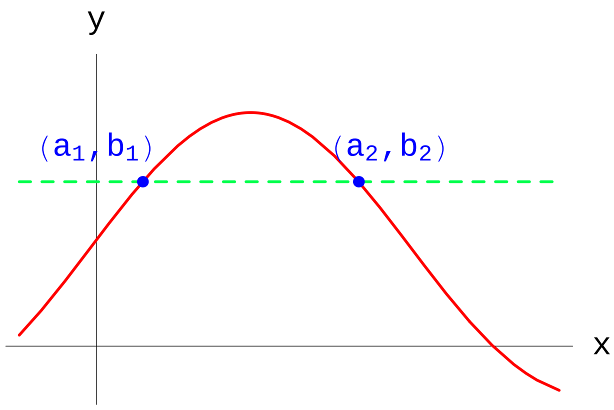


Fig. 10: La funzione non è invertibile

Vi è un altro criterio, di natura analitica, per stabilire se una data funzione sia invertibile. Supponiamo che $f : A \to B$ sia tale che ad ogni $y \in B$ corrisponde almeno un $x \in A$ per cui $y = f(x)$. Se f è strettamente monotona, allora f è invertibile (la stretta monotonia mi dice che ad elementi distinti del dominio corrispondono immagini distinte) e la funzione inversa f^{-1} ha lo stesso tipo di monotonia di f.

3 Combinazioni e composizioni di funzioni

Due funzioni f e g possono essere combinate tra loro per formare delle nuove funzioni $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ in modo simile a quello con cui siamo abituati a sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere numeri reali.

Se definiamo la somma $f+g$ come l'espressione $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, il secondo membro di questa espressione ha senso solo se sia $f(x)$ che $g(x)$ sono definite, cioè se x appartiene sia al dominio di f che a quello di g. Se il dominio di f è l'insieme A e quello di g è l'insieme B, allora il dominio della funzione $f+g$ è l'intersezione di questi due domini, cioè l'insieme $A \cap B$. Analogamente si può definire la differenza $f-g$, il prodotto $f \cdot g$ e il quoziente $\frac{f}{g}$ ricordando che in questo caso non è ammessa la divisione per 0. In definitiva:

- Algebra delle funzioni. Siano f e g due funzioni di dominio A e B rispettivamente. Allora le funzioni $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ sono definite da:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{dominio} \quad A \cap B$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{dominio} \quad A \cap B$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{dominio} \quad A \cap B$$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dominio $\{x \in A \cap B \ : \ g(x) \neq 0\}$

Un'operazione molto importante che permette di ottenere nuove funzioni è la composizione di funzioni. Date due funzioni f e g l'idea è la seguente: prima si calcola il valore di g in x e dopo si valuta la funzione f in tale risultato. Questo risulta chiaramente possibile solo se la funzione f risulta definita nel valore immagine $g(x)$. Quindi si fissa un punto x nel dominio di g e si considera la sua immagine $g(x)$; se tale numero $g(x)$ è nel dominio di f, allora è possibile calcolare il valore $f(g(x))$. Il risultato è una nuova funzione $h(x) = f(g(x))$ detta composizione (o composta) di f e g e si denota con $h = f \circ g$. La funzione composta $f \circ g$ è dunque definita da $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ e il suo dominio è l'insieme di tutte le x appartenenti al dominio di g tali che $g(x)$ è nel dominio di f.

Capitolo III
Funzioni elementari

1 Funzione lineare

Siano $m, q \in \mathbb{R}$, con $m \neq 0$. La funzione che a $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = mx + q$ è chiamata funzione lineare. La funzione lineare ha come dominio e come immagine l'insieme $\mathbb{R}$. Il suo grafico è una retta nel piano $\mathbb{R}^2$ che interseca gli assi coordinati in due punti distinti se $q \neq 0$, coincidenti se $q = 0$. Il comportamento delle funzioni lineari è quello di crescere (decrescere) in modo costante. Se m è positivo, la funzione è strettamente crescente: in particolare più è grande m maggiore sarà la pendenza della retta (Fig. 1). Se m è negativo la funzione è strettamente decrescente: in particolare al diminuire di m la pendenza della retta diventa maggiore (Fig.2).

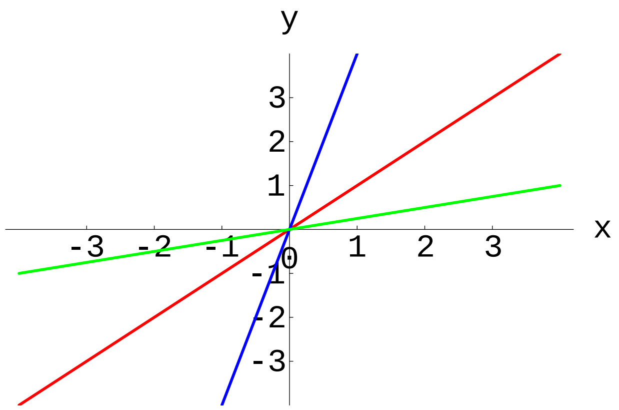


Fig. 1: $f(x) = 4x$, $f(x) = x$, $f(x) = \frac{x}{4}$

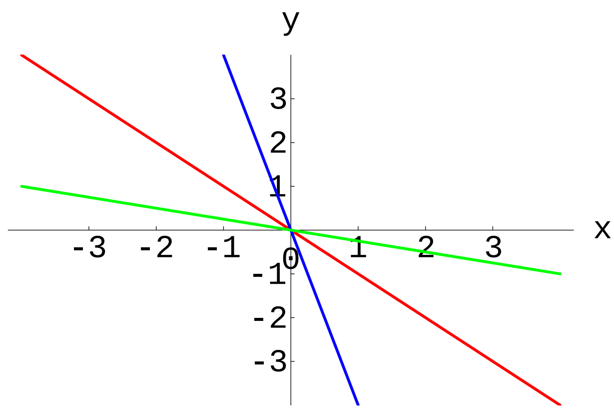


Fig. 2: $f(x) = -4x$, $f(x) = -x$, $f(x) = -\frac{x}{4}$

2 Funzione valore assoluto

Sia x un numero reale. Il valore assoluto, o modulo, di x, che si indica con $|x|$, è la lunghezza del segmento che ha per estremi l'origine e x. Dunque

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dalla definizione stessa di valore assoluto, seguono alcune proprietà:

i) $|x| \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

iii) $|-x| = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

iv) $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

v) $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad x_2 \neq 0.$

Tenendo presente il significato geometrico del valore assoluto, si prova facilmente che se $r \geq 0$, allora valgono le seguenti relazioni

$$|x| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad -r \leq x \leq r \qquad\qquad |x| > r \quad \Leftrightarrow \quad x > r \quad \text{o} \quad x < -r$$

Un'altra proprietà fondamentale del valore assoluto è la disuguaglianza triangolare:

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{risulta} \quad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|\,.$$

La spiegazione intuitiva di tale disuguaglianza è semplice: a secondo membro della disuguaglianza compare la somma di due numeri positivi o nulli, mentre a primo membro compare il modulo della somma di x_1 e x_2; se i segni di x_1 e x_2 sono discordi, il primo membro della disuguaglianza è minore del secondo membro, mentre se i segni sono concordi allora i due membri sono uguali tra loro.

Si può dunque definire una funzione, detta funzione valore assoluto, che ad ogni numero reale x associa il suo modulo. Dalla definizione stessa di modulo, si deduce che la funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e come immagine $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Il grafico di $f(x) = |x|$ è composto da due semirette per l'origine di equazioni rispettivamente $y = x$ e $y = -x$ (Fig. 3).

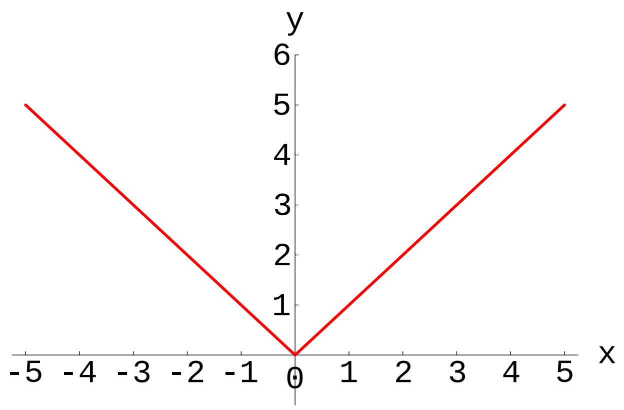


Fig. 3: $f(x) = |x|$

3 Funzione potenza

Una funzione del tipo $f(x) = x^a$, dove a è un numero reale, è detta funzione potenza. Consideriamo i casi in cui a è un numero naturale, un intero o un razionale.

- $a = n$ con $n \in \mathbb{N}$

Se $n = 1$, la funzione potenza si riduce alla funzione lineare $f(x) = x$. Supponiamo dunque $n \geq 2$. Le proprietà di tale funzione, chiamata in questo caso funzione potenza n-esima, variano a seconda che l'esponente n sia pari o dispari. Se n è pari, la funzione $f(x) = x^n$ è una funzione definita in $\mathbb{R}$ ed avente come immagine l'intervallo $[0, +\infty[$; risulta, inoltre, una funzione pari. Se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è definita in $\mathbb{R}$ ed ha come insieme immagine l'insieme $\mathbb{R}$; in questo caso la funzione è una funzione dispari.

Per quanto riguarda le proprietà di monotonia, anche queste dipendono dalla parità di n. In particolare, se n è pari la funzione $f(x) = x^n$ non risulta monotona nel suo insieme di definizione; tuttavia se si considera la funzione per le sole $x \in [0, +\infty[$ la funzione risulta strettamente crescente, mentre se la si considera per le sole $x \in]-\infty, 0]$ essa risulta strettamente decrescente. Se invece n è dispari, allora la funzione potenza n-esima risulta strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda il grafico di tale funzione, osserviamo che al crescere della potenza n, i grafici di $y = x^n$ diventano sempre più piatti vicino a 0 e aumentano la loro pendenza quando $|x| \geq 1$ (Fig 4 - Fig. 5).

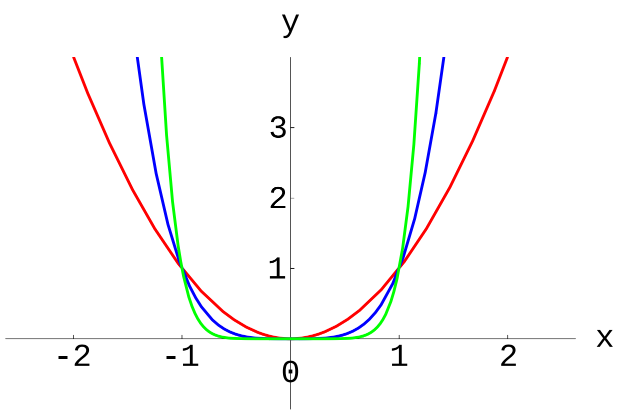


Fig. 4: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^8$

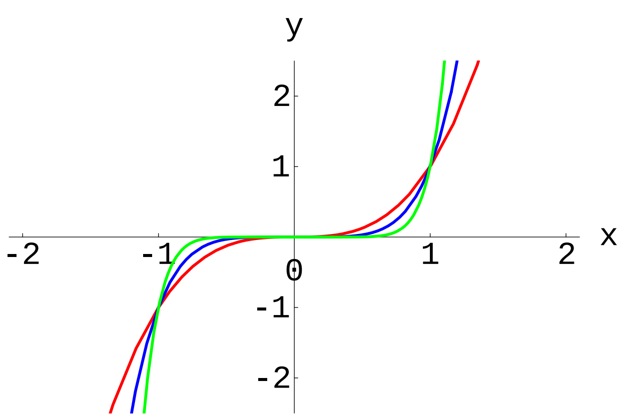


Fig. 5: $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$, $f(x) = x^9$

- $a = -n$ con $n \in \mathbb{N}$

Anche in questo caso le proprietà della funzione $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ dipendono da n. Se n è pari, la funzione $f(x) = x^{-n}$ è una funzione definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed avente come immagine l'intervallo $]0, +\infty[$; risulta, inoltre, una funzione pari. Se n è dispari, la funzione $f(x) = x^{-n}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed ha come insieme immagine l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; in questo caso la funzione è una funzione dispari.

La funzione potenza $f(x) = x^{-n}$ non risulta mai essere una funzione monotona nel suo insieme di definizione. Tuttavia se si considera la funzione $f(x) = x^{-n}$ per le sole $x \in]0, +\infty[$, questa risulta strettamente crescente; se si considera la funzione per le sole $x \in]-\infty, 0[$, allora la funzione $f(x) = x^{-n}$ risulta strettamente decrescente se n è pari e strettamente crescente se n è dispari.

Per quanto riguarda il grafico di tale funzione, osserviamo che al crescere della potenza n, i grafici di $y = x^{-n}$ diventano sempre più pendenti vicino a 0 e sempre più piatti quando $|x| \geq 1$ (Fig. 6 - Fig. 7).

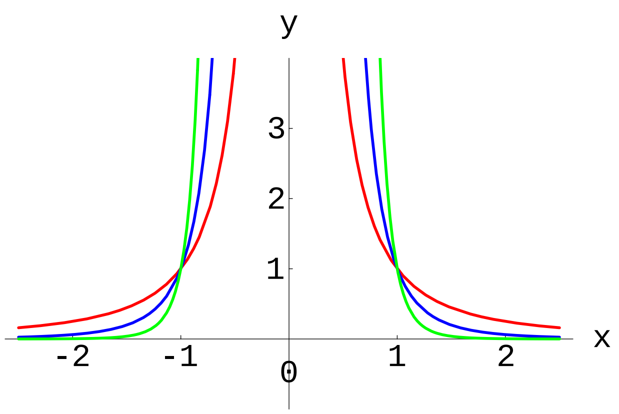


Fig. 6: $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^{-4}$, $f(x) = x^{-8}$

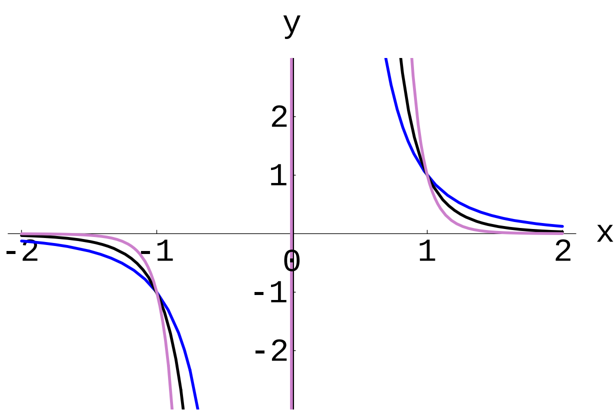


Fig. 7: $f(x) = x^{-3}$, $f(x) = x^{-5}$, $f(x) = x^{-9}$

- $a = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$

La funzione $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ è chiamata funzione radice n-esima. Se n è pari, la funzione è definita in $[0, +\infty[$ ed ha come immagine l'intervallo $[0, +\infty[$. Osserviamo che essa risulta strettamente crescente ed è la funzione inversa della funzione potenza $g(y) = y^n$ con $y \in [0, \infty[$. Se $n \neq 1$ è dispari, allora la funzione radice n-esima è definita in $\mathbb{R}$ ed ha come dominio $\mathbb{R}$; in questo caso è strettamente crescente e risulta essere la funzione inversa della funzione potenza $g(y) = y^n$ con $y \in \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda il grafico di questa funzione, osserviamo che, al crescere di n, i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt[n]{x}$ variano la loro distanza dall'asse delle ascisse; in particolare questa aumenta per $|x| \leq 1$, mentre per $|x| \geq 1$ diminuisce (Fig. 8 - Fig. 9).

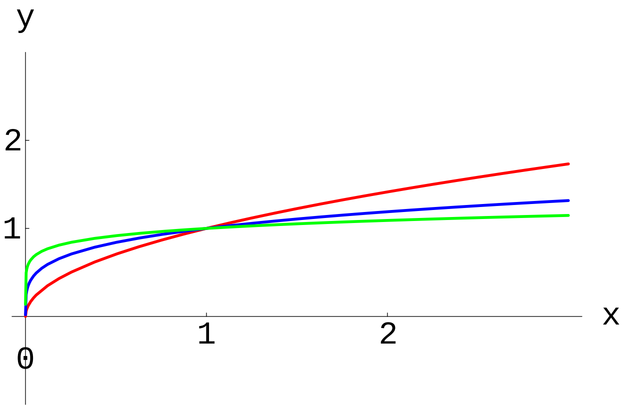


Fig. 8: $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $f(x) = \sqrt[8]{x}$

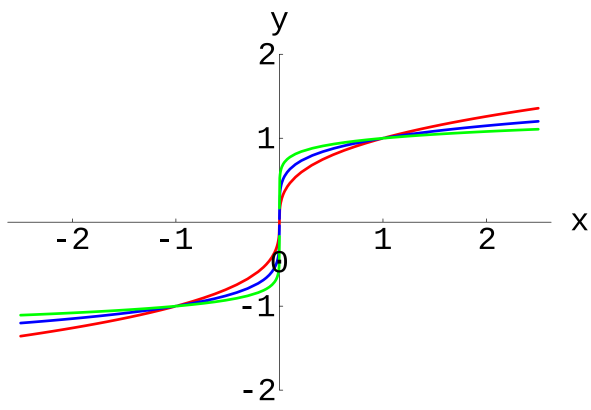


Fig. 9: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $f(x) = \sqrt[9]{x}$

4 Funzione esponenziale

Una funzione esponenziale è una funzione del tipo $f(x) = a^x$ dove a, detta base dell'esponenziale, è una costante positiva diversa da 1. Questa funzione è chiamata così perché la variabile x compare come esponente. Cerchiamo di capire cosa significhi a^x. Se $x = n$, con n naturale, allora $a^n = a \cdot a \cdots a$ (prodotto di a per se stesso n volte). Se $x = 0$, allora $a^0 = 1$ e se $x = -n$, con $n \in \mathbb{N}$, allora $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Se poi x è un numero razionale del tipo $x = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, allora $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$. Ma se x è un irrazionale, quale è il significato di a^x?

Vediamo, ad esempio, cosa significa $2^{\sqrt{3}}$, essendo $\sqrt{3}$ un numero irrazionale. Osserviamo innanzitutto il grafico della funzione $y = 2^x$ facendo variare x solo nei razionali: lo scopo è quello di allargare il dominio di questa funzione in modo che sia costituito da tutto $\mathbb{R}$. I buchi del grafico corrispondono ai valori irrazionali di x: vogliamo riempire questi buchi definendo $f(x) = 2^x$ con $x \in \mathbb{R}$ in modo che f sia una funzione crescente (Fig. 10).

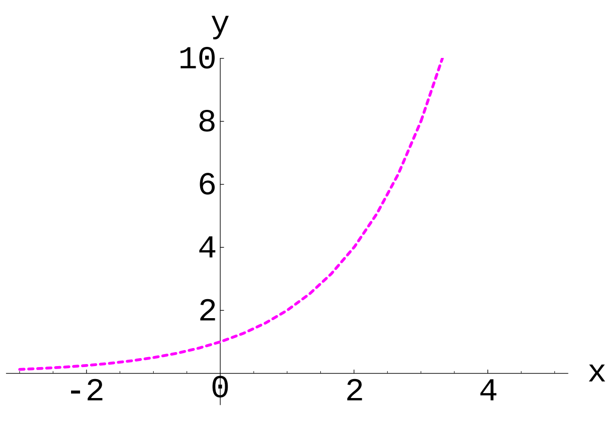


Fig. 10: $f(x) = 2^x$ con $x \in \mathbb{Q}$

Il numero irrazionale $\sqrt{3}$ soddisfa la limitazione $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ e quindi dovrà risultare $2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$, dove sappiamo cosa significano $2^{1.7}$ e $2^{1.8}$ in quanto 1.7 e 1.8 sono razionali. Usando approssimazioni migliori per $\sqrt{3}$, otteniamo approssimazioni migliori per $2^{\sqrt{3}}$:

$$1.73 < \sqrt{3} < 1.734 \quad \Rightarrow \quad 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.734}$$

$$1.732 < \sqrt{3} < 1.733 \quad \Rightarrow \quad 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733}$$

$$1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 \quad \Rightarrow \quad 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321}$$

$$1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 \quad \Rightarrow \quad 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206}$$

Si può dimostrare che c'è uno ed un solo numero che è più grande di tutti i numeri $2^{1.73}$, $2^{1.732}$, $2^{1.7320}$, $2^{1.73205}$, $\cdots\cdots$ ed è più piccolo di tutti i numeri $2^{1.734}$, $2^{1.733}$, $2^{1.7321}$, $2^{1.73206}$, $\cdots\cdots$. Prendiamo questo numero come definizione di $2^{\sqrt{3}}$ (più precisamente questo numero corrisponde al $\sup\{2^q \mid q \in \mathbb{Q} \ : \ q \leq x\} = \inf\{2^q \mid q \in \mathbb{Q} \ : \ q \geq x\}$). Allo stesso modo, si può definire 2^x con un qualunque irrazionale x, riempendo così tutti i buchi del grafico.

Questa tecnica può essere utilizzata per definire a^x con $a > 0$ e x un qualunque irrazionale. A questo punto siamo in grado di definire la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ di base $a > 0$ e diversa da 1. Tale funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e come immagine l'intervallo $]0, +\infty[$. Se la base a è maggiore di 1, la funzione risulta strettamente crescente, mentre se a è minore di 1 la funzione è strettamente decrescente.

Consideriamo i grafici della funzione esponenziale $f(x) = a^x$ con $a > 1$. Osserviamo che, al crescere della base a, i grafici risultano più vicini all'asse delle ascisse quando $x < 0$, mentre crescono più rapidamente per $x > 0$ (Fig. 11). Se invece consideriamo i grafici per $0 < a < 1$, si osserva che al decrescere di a, i grafici sono più distanti dall'asse delle ascisse quando $x < 0$ mentre si schiacciano più rapidamente sull'asse x quando $x > 0$ (Fig. 12).

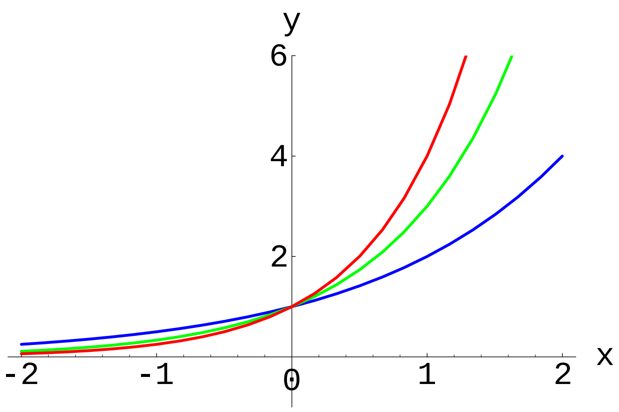


Fig. 11: $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$

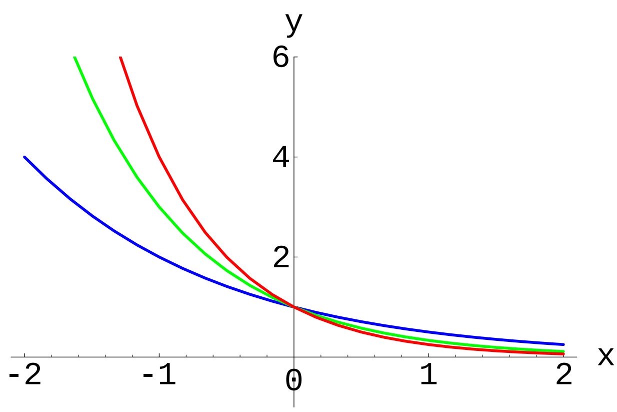


Fig. 12: $f(x) = {\frac{1}{2}}^x$, $f(x) = {\frac{1}{3}}^x$, $f(x) = {\frac{1}{4}}^x$

Tra tutte le possibili basi della funzione esponenziale, una è certamente più conveniente, almeno per gli obiettivi del calcolo. La scelta di tale base è influenzata dal modo in cui il grafico di $y = a^x$ interseca l'asse delle ordinate: in particolare siamo interessati alla pendenza della retta tangente al grafico nel punto (0,1). E' chiaro che alcune formule di calcolo si semplificherebbero notevolmente se scegliessimo la base a in modo che il coefficiente angolare di tale retta tangente fosse esattamente 1. La base con questa proprietà esiste ed è il numero di Nepero e che è un numero irrazionale il cui valore approssimato alla quinta cifra decimale è 2,71828.

Concludiamo ricordando che le proprietà algebriche note per le potenze ad esponente razionale valgono anche per quelle ad esponente reale. Siano a, b due numeri positivi e siano x, y due numeri reali; si ha

$i)$ $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$ii)$ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

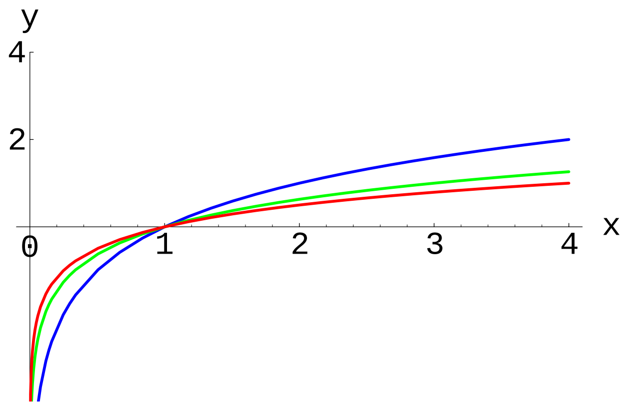
$iii)$ $(a^x)^y = a^{x\,y}$

$iv)$ $(a\,b)^x = a^x\,b^x$

5 Funzione logaritmo

La funzione logaritmo è una funzione della forma $f(x) = \log_a x$, dove a, detta base del logaritmo, è un numero reale positivo e diverso da 1. Tale funzione ha come dominio l'intervallo $]0, +\infty[$ e come immagine $\mathbb{R}$.

Fissato un numero reale positivo x, il numero reale $y = \log_a x$ rappresenta l'esponente al quale bisogna elevare la base a per ottenere l'argomento x. Dunque la funzione logaritmo $f(x) = \log_a x$ è la funzione inversa della funzione esponenziale $g(y) = a^y$ con la stessa base a. Tenendo presente le proprietà della funzione esponenziale, si deduce che la funzione logaritmo $f(x) = \log_a x$ è strettamente crescente se la base a è maggiore di 1, mentre risulta strettamente decrescente se $0 < a < 1$. Se osserviamo i grafici della funzione logaritmo $f(x) = \log_a x$ al variare di $a > 0$, notiamo che quando $a > 1$, tali grafici risultano più vicini all'asse delle ascisse man mano che si considerano valori superiori per le basi (Fig. 13); analogamente, se $0 < a < 1$, al decrescere di a i grafici risultano più vicini all'asse delle ascisse (Fig.14).



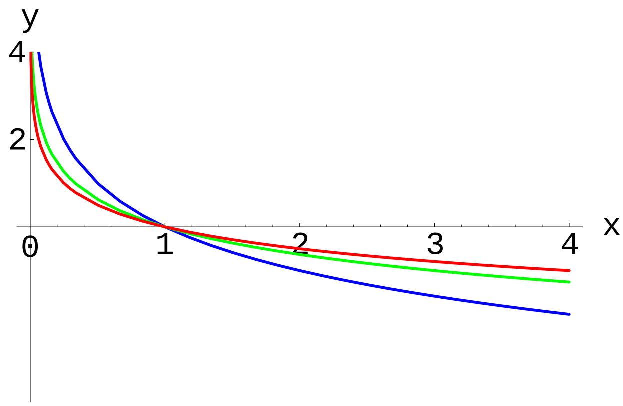


Fig. 13: $f(x) = \log_2 x$, $f(x) = \log_3 x$, $f(x) = \log_4 x$ Fig. 14: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Essendo le funzioni logaritmo ed esponenziale l'una l'inversa dell'altra, valgono le seguenti equazioni di cancellazione:

$$\log_a(a^x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad\qquad a^{\log_a x} = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+$$

Come per la funzione esponenziale, tra tutte le possibili basi, la più conveniente risulta essere il numero di Nepero e. In questo caso il logaritmo si chiama logaritmo naturale e si indica con $\log x$ oppure con $\ln x$.

Logaritmi in basi diverse possono essere rapportati nella stessa base attraverso la formula $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. In particolare $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ quando si vuole esprimere un logaritmo in base a in un logaritmo naturale. Dalle proprietà della funzione esponenziale seguono quelle per la funzione logaritmo. Siano x e y numeri reali positivi, allora

$i)$ $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$

$ii)$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$iii)$ $\log_a (x^b) = b \log_a x \qquad \forall\, b \in \mathbb{R}$

6 Funzioni trigonometriche

Le entità matematiche $\sin\theta$ e $\cos\theta$ sono usualmente introdotte come il rapporto tra i lati di un triangolo rettangolo che ha θ come uno dei suoi angoli acuti. Se c è la lunghezza dell'ipotenusa, a la lunghezza del cateto adiacente all'angolo θ e b quella del cateto opposto all'angolo θ, si ha

$$\sin\theta = \frac{b}{c} \qquad\qquad \cos\theta = \frac{a}{c}$$

Questi rapporti dipendono solo dall'angolo θ e non dal particolare triangolo rettangolo, in quanto tutti i triangoli rettangoli con uno stesso angolo acuto sono simili (Fig. 15).

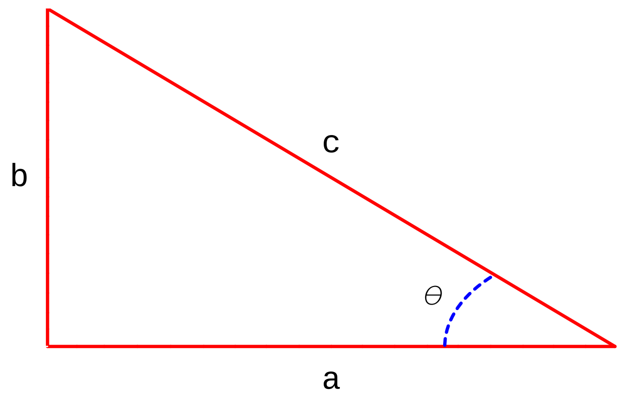


Fig. 15

Nel calcolo differenziale è necessaria una definizione più generale di $\sin x$ e $\cos x$ in modo che siano funzioni definite per tutti i valori di x e non solo per gli angoli acuti. Le nuove funzioni sono espresse in termini di una circonferenza.

Ricordiamo che due semirette r ed r' con origine in uno stesso punto O, dividono il piano che le contiene in due parti che vengono chiamati angoli e che in genere si misurano in gradi. Oltre che in gradi è utile misurare gli angoli in radianti. A tale scopo facciamo alcune osservazioni. Consideriamo due circonferenze concentriche γ_1 e γ_2 di raggi rispettivamente r_1 e r_2. Consideriamo poi un angolo α individuato da due semirette aventi origine nel centro O delle circonferenze. Tale angolo individua sulle circonferenze due archi, α_{γ_1} e α_{γ_2}, aventi lunghezza $\ell(\alpha_{\gamma_1})$ e $\ell(\alpha_{\gamma_2})$ rispettivamente. Si può provare che il rapporto tra la lunghezza dell'arco sotteso all'angolo α e il raggio della circonferenza a cui l'arco appartiene è indipendente dalla circonferenza, cioè $\frac{\ell(\alpha_{\gamma_1})}{r_1} = \frac{\ell(\alpha_{\gamma_2})}{r_2}$ (Fig. 16).

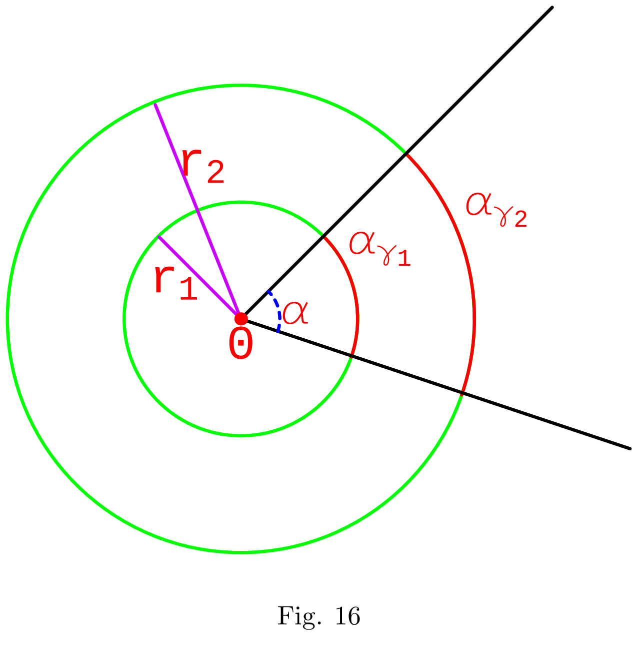


Fig. 16

Nel caso in cui l'angolo corrisponde all'angolo giro, allora l'arco coincide con la circonferenza e si ha $\frac{\ell(\gamma_1)}{r_1} = \frac{\ell(\gamma_2)}{r_2}$, dove $\ell(\gamma)$ rappresenta la lunghezza della circonferenza γ. Quest'ultimo rapporto è a noi ben noto: $2\,\pi$.

Ritornando ad un generico angolo α, il rapporto $\frac{\ell(\alpha_{\gamma_1})}{r_1}$, che dipende dunque solo dall'angolo α e non dalla particolare circonferenza, è utile per definire la misura in radianti di un angolo. Consideriamo una particolare circonferenza: la circonferenza Γ di raggio 1. In questo caso il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio della circonferenza, si riduce alla sola quantità $\ell(\alpha_\Gamma)$. Tale quantità rappresenta la misura in radianti dell'angolo α.

Così, ad esempio, la misura in radianti dell'angolo giro è la lunghezza della circonferenza Γ, cioè $2\,\pi$; la misura in radianti dell'angolo piatto è la lunghezza della semicirconferenza di Γ, cioè π; la misura in radianti dell'angolo retto è la quarta parte della lunghezza della circonferenza Γ, cioè $\frac{\pi}{2}$.

In generale se $p(\alpha)$ è la misura in radianti dell'angolo α si ha $p(\alpha) = \frac{2\,\pi \cdot \alpha}{360^o}$.

Sia ora $x \in \mathbb{R}$. A tale x vogliamo associare un punto $P(x)$ sulla circonferenza Γ avente centro nell'origine 0 del piano cartesiano.

Supponiamo prima che $x \in]0, 2\,\pi]$. In questo caso $P(x)$ è il punto su Γ tale che la lunghezza dell'arco di estremi il punto A di coordinate (1,0) e $P(x)$ sia pari ad x (per individuare il punto $P(x)$ basta considerare x come la misura in radianti di un angolo α: una volta individuata la misura in gradi di α, si riesce ad individuare facilmente l'arco su Γ e quindi il punto $P(x)$).

Supponiamo ora che $x \in \mathbb{R} \setminus]0, 2\,\pi]$. In questo caso è possibile trovare un $k \in \mathbb{Z}$ e un $\bar{x} \in]0, 2\,\pi]$ tali che $x = \bar{x} + 2\,k\,\pi$. Il punto $P(x)$ su Γ sarà lo stesso associato ad $\bar{x}$, cioè $P(x) = P(\bar{x})$.

In questo modo ad ogni numero reale x viene associato un punto $P(x)$ sulla circonferenza unitaria Γ: in pratica il punto $P(x)$ è un punto su Γ posto alla distanza $|x|$ da A misurata in senso antiorario se $x > 0$ e in senso orario se $x < 0$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si definiscono $\sin x$ e $\cos x$ rispettivamente come l'ordinata e l'ascissa del punto $P(x)$ (Fig. 17).

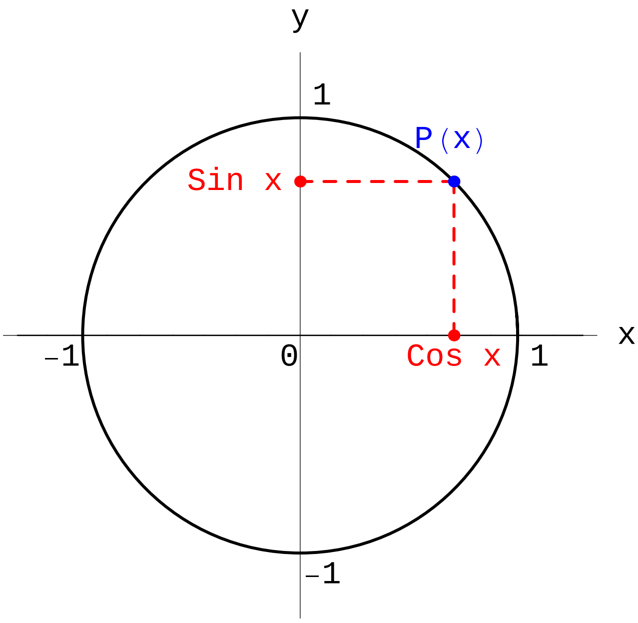


Fig. 17

Dal teorema di Pitagora, osservando che la distanza tra l'origine 0 e il punto $P(x)$ vale 1, si ricava la formula $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. Tenendo presente il significato geometrico di $P(x)$ e come ad ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sia possibile associare un angolo la cui misura in gradi vari tra 0^o e 90^o, si determina la seguente tabella

$$\sin 0 = \sin 0^o = 0 \qquad \cos 0 = \cos 0^o = 1$$
$$\sin \tfrac{\pi}{6} = \sin 30^o = \tfrac{1}{2} \qquad \cos \tfrac{\pi}{6} = \cos 30^o = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin \tfrac{\pi}{4} = \sin 45^o = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos \tfrac{\pi}{4} = \cos 45^o = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin \tfrac{\pi}{3} = \sin 60^o = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos \tfrac{\pi}{3} = \cos 60^o = \tfrac{1}{2}$$
$$\sin \tfrac{\pi}{2} = \sin 90^o = 1 \qquad \cos \tfrac{\pi}{2} = \cos 90^o = 0$$

Per gli altri valori in $[0, 2\,\pi]$ si possono utilizzare le formule

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(2\,\pi - x) = -\sin x \qquad \cos(2\,\pi - x) = \cos x$$

Se x è un generico numero reale, è utile tener presente anche le formule

$$\sin(x + 2\,k\,\pi) = \sin x \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad \cos(x + 2\,k\,\pi) = \cos x \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

che sono una diretta conseguenza del modo in cui a numeri che differiscono di multipli di $2\,\pi$ viene associato il punto sulla circonferenza unitaria.

A questo punto siamo in grado di definire le funzioni trigonometriche.

- funzione seno

La funzione seno $f(x) = \sin x$ è una funzione definita in $\mathbb{R}$ ed ha come immagine l'intervallo $[-1, 1]$. Essa risulta essere una funzione dispari e periodica di 2π, cioè $f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. La funzione seno non è una funzione monotona nel suo insieme di definizione. Tuttavia se si considera la funzione $f(x) = \sin x$ per le sole $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, con $k \in \mathbb{Z}$, questa è una funzione strettamente crescente; se invece si considera la funzione $f(x) = \sin x$ per le sole $x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$, con $k \in \mathbb{Z}$, questa è una funzione strettamente decrescente (Fig. 18).

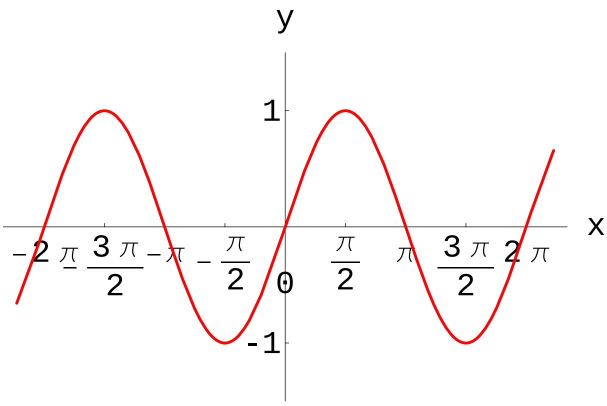


Fig. 18: $f(x) = \sin x$

- funzione coseno

La funzione coseno $f(x) = \cos x$ è anch'essa una funzione definita in $\mathbb{R}$ ed avente come immagine l'intervallo $[-1, 1]$. Questa funzione risulta essere una funzione pari e periodica di 2π. Anche la funzione coseno non è una funzione monotona nel suo insieme di definizione.

In questo caso se si considera la funzione $f(x) = \cos x$ per le sole $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, con $k \in \mathbb{Z}$, questa è una funzione strettamente decrescente; se invece si considera la funzione $f(x) = \cos x$ per le sole $x \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, con $k \in \mathbb{Z}$, questa è una funzione strettamente crescente (Fig. 19).

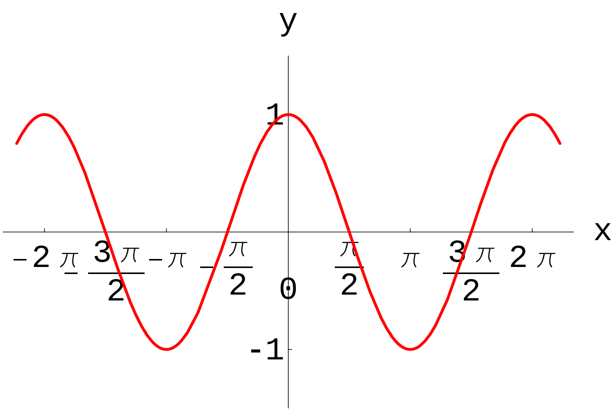


Fig. 19: $f(x) = \cos x$

- funzione tangente

A partire dalle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ è possibile definire una nuova funzione, la funzione tangente $f(x) = \tan x$. Quest'ultima risulta definita come il rapporto tra il seno e il coseno di x, cioè $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Tenendo presente come ad ogni $x \in \mathbb{R}$ si associa il punto $P(x)$ sulla circonferenza Γ e il significato geometrico del $\sin x$ e del $\cos x$, si vede che $\tan x$ altro non rappresenta che l'ordinata del punto $Q(x)$ ottenuto dall'intersezione del segmento passante per l'origine O e per il punto $P(x)$ con la tangente geometrica alla circonferenza Γ nel punto A di coordinate (0,1) (Fig 20).

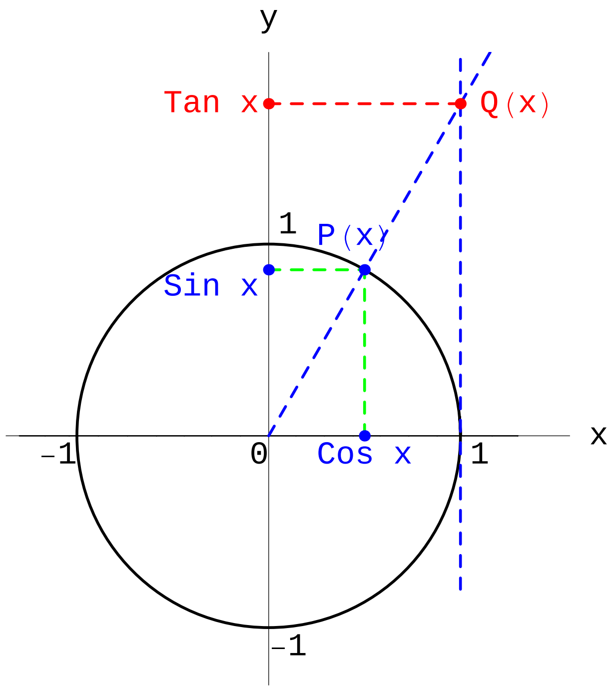


Fig. 20

Per le $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ si ottengono i seguenti valori per la tangente

$$\tan 0 = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Per gli altri valori di $x \in [0, 2\pi]$ in cui la $\tan x$ è definita si possono utilizzare le formule

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(2\pi - x) = -\tan x$$

Se x è un generico numero reale di cui è possibile calcolare la tangente, allora

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ritornando alla funzione tangente $f(x) = \tan x$, osserviamo che questa risulta definita in $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ed ha come immagine $\mathbb{R}$. Essa risulta essere una funzione dispari e periodica di π, cioè $f(x + \pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. Inoltre la funzione tangente non risulta essere monotona nel suo insieme di definizione, ma se la si considera per le solo $x \in]-\frac{\pi}{2}+k\,\pi, \frac{\pi}{2}+k\,\pi[$, con $k \in \mathbb{Z}$, essa risulta essere strettamente crescente (Fig. 21).

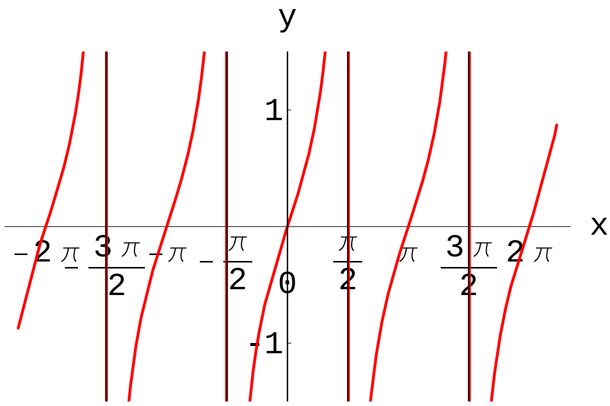


Fig. 21: $f(x) = \tan x$

7 Funzioni trigonometriche inverse

Nel cercare la funzione inversa di una funzione trigonometrica sorge immediatamente una difficoltà: esse non sono invertibili. Questo problema viene risolto restrigendo opportunamente il dominio delle funzioni trigonometriche.

- funzione arcoseno

Consideriamo la funzione $g(y) = \sin y$ con $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tale funzione è strettamente crescente e quindi invertibile. La sua inversa si chiama funzione arcoseno e si indica con $f(x) = \arcsin x$. Tenendo presente le proprietà della funzione $g(y) = \sin y$ con $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si deduce che la funzione $f(x) = \arcsin x$ è definita in $[-1, 1]$ ed ha come immagine l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Essa risulta una funzione dispari e strettamente crescente nel suo insieme di definizione (Fig. 22).

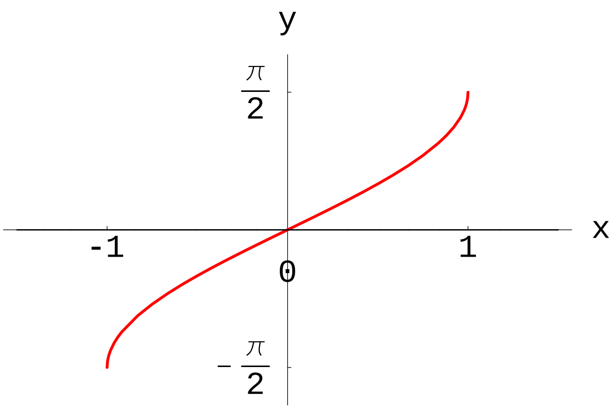


Fig. 22: $f(x) = \arcsin x$

Dalla definizione segue che

$$\arcsin x = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Valgono le seguenti regole di cancellazione

$$\arcsin(\sin y) = y \qquad \forall\, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad\qquad \sin(\arcsin x) = x \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

- funzione arcocoseno

Consideriamo la funzione $g(y) = \cos y$ con $y \in [0, \pi]$. Tale funzione è strettamente decrescente e quindi invertibile. La sua inversa si chiama funzione arcocoseno e si indica con $f(x) = \arccos x$.

Tenendo presente le proprietà della funzione $g(y) = \cos y$ con $y \in [0, \pi]$, si deduce che la funzione $f(x) = \arccos x$ è definita in $[-1, 1]$ ed ha come immagine l'intervallo $[0, \pi]$. La funzione risulta strettamente decrescente nel suo insieme di definizione (Fig. 23).

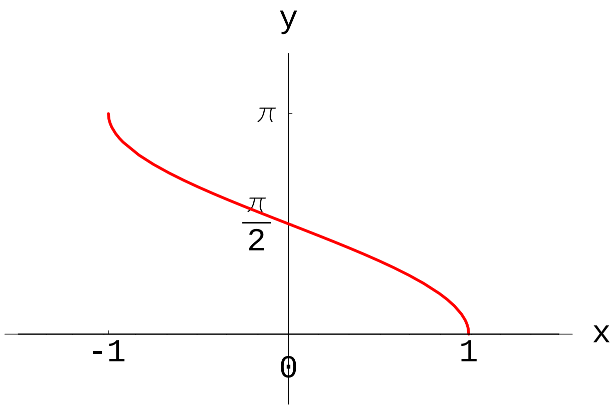


Fig. 23: $f(x) = \arccos x$

Dalla definizione segue che

$$\arccos x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

Valgono le seguenti regole di cancellazione

$$\arccos(\cos y) = y \qquad \forall\, y \in [0,\, \pi] \qquad\qquad \cos(\arccos x) = x \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

- funzione arcotangente

Consideriamo la funzione $g(y) = \tan y$ con $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Tale funzione è strettamente crescente e quindi invertibile. La sua inversa si chiama funzione arcotangente e si indica con $f(x) = \arctan x$.

Tenendo presente le proprietà della funzione $g(y) = \tan y$ con $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, si deduce che la funzione $f(x) = \arctan x$ è definita in $\mathbb{R}$ ed ha come immagine l'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Essa risulta una funzione dispari e strettamente crescente nel suo insieme di definizione (Fig. 24).

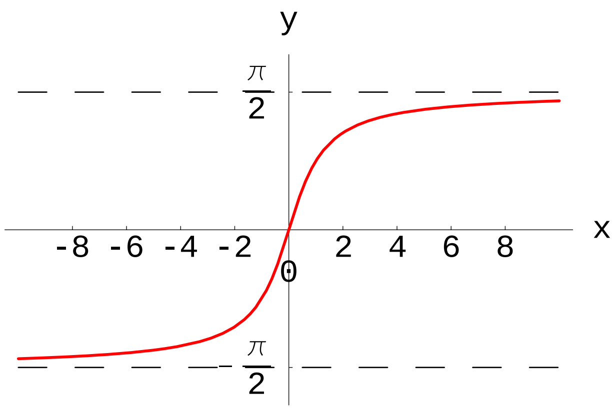


Fig. 24: $f(x) = \arctan x$

Dalla definizione segue che

$$\arctan x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Valgono le seguenti regole di cancellazione

$$\arctan(\tan y) = y \qquad \forall\, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\qquad\qquad \tan(\arctan x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Capitolo IV
Successioni numeriche

1 Successioni

Si può pensare ad una successione come ad una sequenza di numeri scritti in un ordine assegnato: $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. Il numero a_1 viene detto primo termine, a_2 secondo termine e in generale a_n è il termine n-esimo della successione. In una successione infinita ogni termine a_n ha un successivo, a_{n+1}. Poiché ad ogni naturale n corrisponde un valore a_n, la successione può essere interpretata come una funzione che ha per dominio l'insieme dei naturali.

Definizione 1.1 *Una successione è una funzione* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. •

L'immagine $f(n)$ della funzione f sul naturale n si indica usualmente con a_n, mentre la successione $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ viene anche indicata con uno dei simboli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n), $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Alcune successioni possono essere assegnate dando la formula esplicita per il termine n-esimo:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad a_n = \sqrt{n-3}\,.$$

Osserviamo, come nell'ultimo esempio, che si parla ancora di successioni anche se non sono definiti i termini a_n per un numero finito di naturali (in questo caso per i primi due naturali).

Essendo delle particolari funzioni, possiamo rivedere alcune definizioni date per le funzioni reali nel caso delle successioni.

Definizione 1.2 *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione. Diremo che la successione è*

i) strettamente crescente se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iii) strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iv) decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ •

Diremo che la successione è monotona se verifica una delle precedenti condizioni; se in particolare verifica la condizione i) oppure la condizione iii) diremo che la successione strettamente monotona.

Come per gli insiemi, anche per le successioni è possibile dare il concetto di limitatezza.

Definizione 1.3 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Diremo che la successione è limitata inferiormente se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che $l \leq a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Diremo che a successione è limitata superiormente se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $L \geq a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Infine la successione si dirà limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente.* •

I numeri reali l ed L della precedente definizione sono chiamati minorante e maggiorante della successione. A partire dalla definizione precedente, si possono definire gli estremi di una successione.

Definizione 1.4 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Se la successione è limitata inferiormente, si chiama estremo inferiore di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e si indica con $\inf\limits_{\mathbb{N}} a_n$, il massimo dell'insieme dei suoi minoranti. Se invece la successione è limitata superiormente, si chiama estremo superiore di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e si indica con $\sup\limits_{\mathbb{N}} a_n$, il minimo dell'insieme dei suoi maggioranti.* •

Se la successione è limitata inferiormente, allora l'estremo inferiore è il numero reale λ caratterizzato dalle proprietà

$$\lambda = \inf_{\mathbb{N}} a_n = \begin{cases} \lambda \leq a_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \\ \forall\, \epsilon > 0 & \exists\, n_o \in \mathbb{N} \quad : \quad a_{n_o} < \lambda + \epsilon\,. \end{cases}$$

Se la successione non è limitata inferiormente, cioè se $\forall\, l \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_o \in \mathbb{N} \;:\; a_{n_o} < l$, allora si pone $\inf\limits_{\mathbb{N}} a_n = -\infty$.

Se la successione è limitata superiormente, allora l'estremo superiore è il numero reale Λ caratterizzato dalle proprietà

$$\Lambda = \sup_{\mathbb{N}} a_n = \begin{cases} \Lambda \geq a_n & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \\ \forall\, \epsilon > 0 & \exists\, n_o \in \mathbb{N} \quad : \quad a_{n_o} > \Lambda - \epsilon\,. \end{cases}$$

Se la successione non è limitata superiormente, cioè se $\forall\, L \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_o \in \mathbb{N} \;:\; a_{n_o} > L$, allora si pone $\sup\limits_{\mathbb{N}} a_n = +\infty$.

2 Limite di una successione

Una successione può essere rappresentata sia disegnandone i termini su di una retta graduata, sia disegnandone il grafico. Poiché la successione è una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$, il suo grafico consiste in punti isolati di coordinate $(1, a_1)$, $(2, a_2), \cdots$, $(n, a_n), \cdots$.

Consideriamo, ad esempio, la successione $a_n = \frac{n}{n+1}$ e i due modi per rappresentarla (Fig. 1 - Fig. 2)

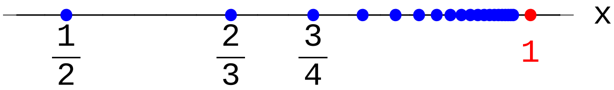


Fig. 1

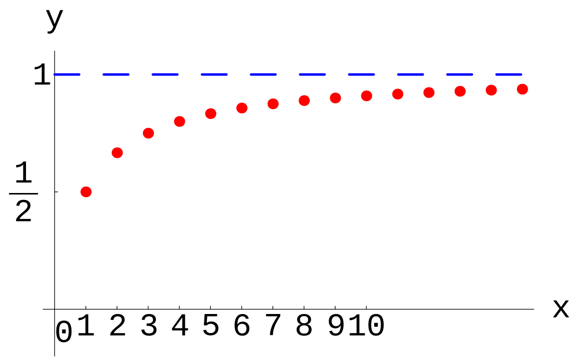


Fig. 2

Si vede che i termini di questa successione tendono a 1 al crescere di n, cioè la differenza $1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1}$ può essere resa "piccola" a piacere pur di prendere n sufficientemente "grande". Questa proprietà esprime quella che si chiama la convergenza della successione.

Definizione 2.1 *Diremo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge verso (o ha per limite) il numero reale a se*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > \nu \, .$$

In questo caso scriviamo $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$. •

Osserviamo che la precedente definizione è equivalente a

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0 \ : \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a| < c\epsilon \quad \forall n > \nu \, .$$

In base alla definizione data, una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge al numero reale a se la differenza tra a_n ed a diviene, al crescere di n, arbitrariamente piccola.

Questo tipo di comportamento non accade per tutte le successioni. Consideriamo ad esempio la successione $a_n = n$. Tale successione non converge verso nessun numero reale: infatti fissato un qualunque $a \in \mathbb{R}$, per $n > a$ il generico termine della succesione a_n, al crescere di n, si allontana sempre di più da a.

Consideriamo ora la successione $a_n = (-1)^n$. Anche questa successione non converge a nessun numero reale visto che, per n pari, $a_n = 1$ e, per n dispari, $a_n = -1$ e quindi la distanza tra -1 e 1 è fissa e vale 2.

Le due successioni esaminate non convergono. Questo accade per due motivi diversi: la prima successione non converge perché in qualche modo esplode, la seconda non converge perché oscilla tra due valori distinti. Nel primo caso, tuttavia, risulta molto utile interpretare la proprietà di superare qualunque quantità fissata in termini di avvicinamento all'infinito.

Definizione 2.2 *Diremo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge positivamente (o ha limite uguale a $+\infty$) se*

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;:\; a_n > M \quad \forall\, n > \nu\,.$$

In questo caso scriviamo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Diremo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge negativamente (o ha limite uguale a $-\infty$) se

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;:\; a_n < -M \quad \forall\, n > \nu\,.$$

In questo caso scriviamo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. •

Le successioni convergenti o divergenti vengono dette regolari. Le successioni che non ammettono limite sono dette indeterminate. Se in particolare una successione converge a 0, allora è detta infinitesima.

Osserviamo che nella definizione di convergenza hanno importanza i valori di ϵ vicino a 0 che impongono ai termini a_n della successione, di indice maggiore di ν, di dare una buona approssimazione di a. Invece nella definizione di divergenza, hanno importanza i valori grandi di M che stimano la crescita dei termini della successione al crescere di n.

Abbiamo visto come l'operazione di limite per una successione non sia sempre possibile, ma quando è possibile è ben definita.

Teorema 2.3 *(Unicità del limite) Una successione convergente non può avere due limiti distinti.*

Dimostrazione - Supponiamo per assurdo che esistano due limiti distinti a e b per la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Poniamo $\epsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$. Dalla definizione di limite segue che in corrispondenza di questo ϵ si ha

(1) $$\exists\, \nu_1 \in \mathbb{N} \;:\; |a_n - a| < \epsilon \quad \forall\, n > \nu_1 \qquad\qquad \exists\, \nu_2 \in \mathbb{N} \;:\; |a_n - b| < \epsilon \quad \forall\, n > \nu_2\,.$$

Posto $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, per $n > \nu$, dalla (1) e dalla disuguaglianza triangolare segue

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \le |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |a-b|\,.$$

Dunque $|a-b| < |a-b|$ che è un assurdo. •

Le successioni convergenti godono di una particolare proprietà.

Teorema 2.4 *Ogni successione convergente è limitata.* •

Questo teorema non si può invertire, nel senso che esistono successioni limitate che non convergono. Basti pensare alla successione $a_n = (-1)^n$.

3 Operazioni con i limiti

Analizziamo ora le principali regole operative per il calcolo dei limiti di successioni: esse ci dicono come si comporta l'operazione di limite rispetto alle principali operazioni algebriche.

Teorema 3.1 *Siano* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *due successioni convergenti ad* a *e* b *rispettivamente. Allora*

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n = a + b$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n = a - b$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n = a \cdot b$

iv) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n} = \frac{a}{b}$ *se* $b_n,\, b \neq 0$.

Dimostrazione - Proviamo solo la i). Dalla definizione di limite segue che, per ogni fissato $\epsilon > 0$

$$\exists\, \nu_1 \in \mathbb{N}\ :\ |a_n - a| < \epsilon \quad \forall\, n > \nu_1 \qquad\qquad \exists\, \nu_2 \in \mathbb{N}\ :\ |b_n - b| < \epsilon \quad \forall\, n > \nu_2\,.$$

Posto $\nu = \max\{\nu_1,\ \nu_2\}$, dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2\,\epsilon \qquad \forall\, n > \nu$$

e quindi, in base alla definizione, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$. •

Ci si può chiedere cosa succede quando una o entrambe le successioni divergono, o cosa succede nel caso del rapporto quando la successione al denominatore è infinitesima. In questi casi non è possibile scambiare l'operazione di limite con l'operazione algebrica; tuttavia, in alcuni casi, il limite della somma, differenza, prodotto o rapporto di due successioni continua ad esistere. In particolare si ha

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty\,(-\infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty\,(-\infty)$

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty\,(-\infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty\,(-\infty) & \text{se} \quad a > 0 \\ -\infty\,(+\infty) & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty\,(-\infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = -\infty$

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$

- $\star \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,(-\infty) \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty\,(-\infty) & \text{se} \quad b > 0 \\ -\infty\,(+\infty) & \text{se} \quad b < 0 \end{cases}$

- $\star \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b_n > 0 \quad \text{per } n \text{ sufficientemente grande} \\ -\infty & \text{se} \quad b_n < 0 \quad \text{per } n \text{ sufficientemente grande.} \end{cases}$

Restano esclusi da questa tabella alcune casi che schematizziamo nelle seguenti forme, dette forme indeterminate:

$$\infty - \infty \qquad\qquad 0 \cdot \infty \qquad\qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad\qquad \frac{0}{0}$$

Dire che un limite è in una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma significa che occorre preliminarmente eseguire trasformazioni, o semplificazioni, per togliere se possibile l'indeterminazione.

4 Teoremi di confronto

Vediamo ora come si comporta l'operazione di limite rispetto all'ordinamento dei numeri reali.

Teorema 4.1 *(Teorema della permanenza del segno) Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge verso un numero $a > 0$, allora esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0 \quad \forall\, n > \nu$.*

Dimostrazione - Scegliamo $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$ nella definizione di limite. Allora esisterà un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1) \qquad |a_n - a| < \epsilon = \frac{a}{2} \qquad \forall\, n > \nu\,.$$

Dalle proprietà del valore assoluto, la (1) è equivalente a

$$(2) \qquad -\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2} \qquad \forall\, n > \nu\,.$$

Ma la (2) è a sua volta equivalente a

$$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a \qquad \forall\, n > \nu$$

e dunque $a_n > 0 \quad \forall\, n > \nu$. •

In generale non si può dire che tutti i termini della successione sono positivi se il limite è positivo, ma sicuramente lo sono da un certo punto in poi. È evidente che se la successione converge verso un numero reale $a < 0$ allora da un certo punto in poi i termini della successione saranno tutti negativi.

Nel caso in cui il limite della successione è 0, allora non si può dire nulla sul segno dei termini della successione: basti pensari alla successione $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Il teorema della permanenza del segno ha un'importante conseguenza.

Corollario 4.2 *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente tale che $a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Allora se a è il limite della successione, risulta $a \geq 0$.*

Dimostrazione - Se per assurdo fosse $a < 0$, allora per il teorema della permanenza del segno dovrebbe esistere un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < 0 \quad \forall\, n > \nu$. Ma ciò è in contrasto con l'ipotesi che tutti i termini a_n della successione sono non negativi. •

5 Limiti delle successioni monotone

Un'importante classe di successioni è quella delle successioni monotone, nelle quali nel passare dal termine di indice n al successivo il comportamento qualitativo è sempre lo stesso. Tali successioni risultano sempre regolari.

Teorema 5.1 *(Regolarità delle successioni monotone) Ogni successione monotona limitata è convergente; ogni successione monotona non limitata superiormente (inferiormente) diverge positivamente (negativamente).*

Dimostrazione - Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona crescente e limitata. Poniamo $L = \sup_{\mathbb{N}} a_n$; proveremo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$. Dalle proprietà dell'estremo superiore segue che

(1) $$\forall\,\epsilon > 0 \qquad \exists\,\nu \in \mathbb{N} \quad : \quad L - \epsilon < a_\nu\,.$$

Dalla crescenza della successione si ha che

(2) $$a_\nu \le a_n \qquad \forall\, n > \nu\,.$$

Così dalle (1) e (2) e dalla proprietà transitiva otteniamo

(3) $$\forall\,\epsilon > 0 \qquad \exists\,\nu \in \mathbb{N} \quad : \quad L - \epsilon < a_n \qquad \forall\, n > \nu\,.$$

D'altra parte essendo $L = \sup_{\mathbb{N}} a_n$, si ha anche

(4) $$\forall\,\epsilon > 0 \qquad a_n \le L < L + \epsilon \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Così dalle (3) e (4) segue che

$$\forall\,\epsilon > 0 \qquad \exists\,\nu \in \mathbb{N} \quad : \quad L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \qquad \forall\, n > \nu,$$

cioè, per definizione, $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

Supponiamo ora che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia crescente ma non limitata superiormente. La non limitatezza della successione implica che

(5) $$\forall\, M > 0 \qquad \exists\,\nu \in \mathbb{N} \quad : \quad a_\nu > M\,.$$

Poiché la successione è crescente, vale la (2). Così dalle (2) e (5) e ancora dalla proprietà transitiva si ha

$$\forall\, M > 0 \qquad \exists\,\nu \in \mathbb{N} \quad : \quad a_n > M \qquad \forall\, n > \nu,$$

cioè, sempre im base alla definizione, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Il caso in cui la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente si prova in modo simile. •

Come si evince dalla dimostrazione, si può concludere che se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{\mathbb{N}} a_n$, mentre se la successione è decrescente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{\mathbb{N}} a_n$.

6 Alcuni limiti fondamentali

Dal teorema sulla regolarità delle successioni monotone e dalle proprietà delle funzioni elementari si possono dedurre alcuni limiti di successioni che sono alla base del calcolo di altri limiti di successioni.

$\star$ $$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 1 & \text{se} \quad a = 1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{se} \quad a \leq -1 \end{cases}$$

$\star$ $$\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b > 0 \\ 1 & \text{se} \quad b = 0 \\ 0 & \text{se} \quad b < 0 \end{cases}$$

$\star$ $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \forall\, a > 0$$

$\star$ $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1 \qquad \forall\, b > 0$$

$\star$ $$\lim_{n\to+\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ -\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$\star$ $$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

Osserviamo che le successioni di termine generale

$$(1) \qquad \log_a n \quad (a > 1) \qquad\qquad n^b \quad (b > 0) \qquad\qquad a^n \quad (a > 1) \qquad\qquad n!$$

sono tutte divergenti positivamente. Tali successioni sono spesse confrontate tra loro dando i seguenti risultati:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a n}{n^b} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

Tale proprietà è talvolta espressa affermando che le successioni definite dalla (1) sono infiniti di ordine crescente, cioè nonostante siano tutte successioni divergenti positivamente, nel rapporto la successiva predomina rispetto alla precedente.

Importante nell'ambito della teoria delle successioni è la successione di termine generale

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Tale successione risulta strettamente crescente e limitata: il suo estremo superiore è il numero di Nepero e. Dal teorema sulla regolarità delle successioni monotone si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Capitolo V
Limiti di funzioni. Funzioni continue

1 Limite di una funzione

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Questa funzione risulta definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Quello che ci proponiamo di fare è di analizzare il comportamento di $f(x)$ vicino a $x = 1$. Osserviamo che per ogni $x \neq 1$ è possibile semplificare l'espressione di $f(x)$ fattorizzando il numeratore e semplificando, cioè:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x - 1} = x + 1 \qquad x \neq 1\,.$$

Il grafico di f è dunque la retta $y = x + 1$ con un punto in meno, precisamente il punto di coordinate (1,2) (Fig. 1).

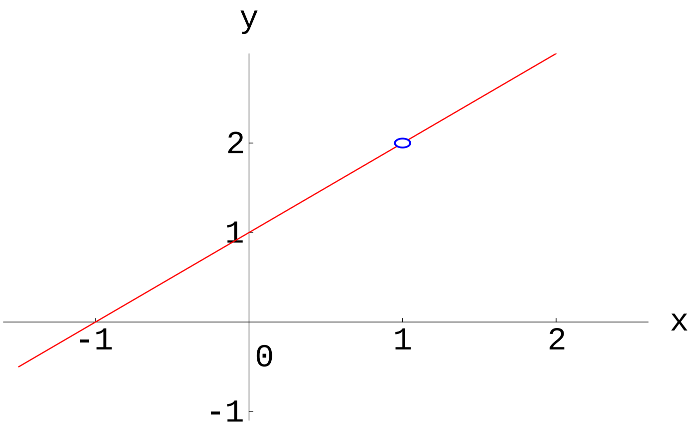


Fig. 1

Graficamente si vede che, anche se f non è definita in $x = 1$, è possibile far avvicinare il valore di $f(x)$ tanto quanto vogliamo a 2 pur di scegliere x sufficientemente vicino a 1: questo fatto si esprime dicendo che $f(x)$ tende al limite 2 quando x tende a 1.

Una formula più rigorosa del comportamento di $f(x)$ vicino ad 1, si può ottenere nel seguente modo. Consideriamo una generica successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad 1 (cioè x_n è vicino a 1 se n è grande) e la corrispondente successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ costituita dai valori assunti dalla funzione $f(x)$ nei punti x_n (cioè $y_n = f(x_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$). Si ottiene così una tabella ideale, illimitata a destra, del tipo

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\cdots$	$\cdots$
$f(x)$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$y_3 = f(x_3)$	$y_4 = f(x_4)$	$y_5 = f(x_5)$	$\cdots$	$\cdots$

Se accade che, qualsiasi sia la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad 1, le corrispondenti successioni $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono a 2, allora diremo che la funzione $f(x)$ ammette limite uguale a 2 per x che tende a 1.

Consideriamo ora una generica funzione $f(x)$ il cui dominio A è costituito da un intervallo (o dall'unione finita di intervalli) e un generico punto x_o che può appartenere ad A oppure esserne un estremo. Lo scopo, come nell'esempio precedente, è quello di analizzare il comportamento di $f(x)$ quando x si avvicina ad x_o.

Consideriamo prima il caso in cui $x_o \in \mathbb{R}$.

Definizione 1.1 *Si dice che la funzione $f(x)$ converge (o ha per limite) il numero reale l per x che tende a x_o se, qualunque sia la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n \in A \setminus \{x_o\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_o$, risulta $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. In questo caso scriviamo $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = l$.* •

Secondo la definizione, nell'esempio precedente si potrà scrivere $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Sempre dall'esempio precedente abbiamo visto che un altro modo per esprimere il fatto che $f(x)$ ha limite l per x che tende a x_o, è che possiamo rendere $f(x)$ arbitrariamente vicino ad l pur di prendere x sufficientemente vicino a x_o (ma non coincidente con x_o). Una definizione equivalente di limite si basa proprio sull'idea di specificare quanto piccola deve essere la distanza $|x - x_o|$ di x da x_o per riuscire ad avere la distanza $|f(x) - l|$ minore di una quantità fissata.

Teorema 1.2 *(Legame tra i limiti di funzioni e i limiti di successioni) Si ha che $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = l$ se e solo se $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che per ogni $x \in A \setminus \{x_o\}$ con $|x - x_o| < \delta$ risulta $|f(x) - l| < \epsilon$.* •

In base a questo teorema, risultano quindi equivalenti le affermazioni

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \setminus \{x_o\} \ : \ \lim_{n\to+\infty} x_n = x_o \quad \text{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in A \setminus \{x_o\} \quad \text{con} \quad |x - x_o| < \delta \quad \text{risulta} \quad |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Talvolta può accadere che per x che si avvicina a x_o, i valori di $f(x)$ diventano arbitrariamente grandi (piccoli). Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Questa funzione non è definita in $x_o = 0$; se x è vicina ad assumere il valore 0, ancora di più lo è x^2 e di conseguenza

$\frac{1}{x^2}$ diventa molto grande. In particolare si può vedere che i valori di $\frac{1}{x^2}$ possono essere resi grandi a piacere pur di scegliere x sufficientemente vicino a 0 (Fig. 2).

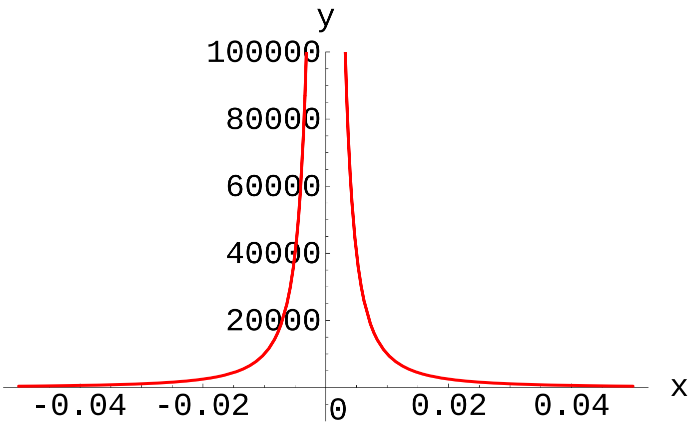


Fig. 2

Questo esempio mostra il comportamento di una funzione divergente positivamente per x che tende a x_o.

Se i valori di $f(x)$ dovessero diventare arbitrariamente piccoli per x che tende a x_o, allora si parla di funzioni divergenti negativamente.

In questi casi le definizioni rigorose di limite, sia attraverso le successioni che attraverso le disuguaglianze sono espresse attraverso la seguente definizione.

Definizione 1.3 *Diremo che la funzione $f(x)$ diverge positivamente per x che tende a x_o e scriveremo $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ se e solo se*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \setminus \{x_o\} \;:\; \lim_{n\to+\infty} x_n = x_o \quad \textit{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \in A \setminus \{x_o\} \quad \textit{con} \quad |x - x_o| < \delta \quad \textit{risulta} \quad f(x) > M\,.$$

Diremo che la funzione $f(x)$ diverge negativamente per x che tende a x_o e scriveremo $\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \setminus \{x_o\} \;:\; \lim_{n\to+\infty} x_n = x_o \quad \textit{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \in A \setminus \{x_o\} \quad \textit{con} \quad |x - x_o| < \delta \quad \textit{risulta} \quad f(x) < -M\,. \quad \bullet$$

Supponiamo ora che l'insieme A non sia limitato superiormente (inferiormente). In questo caso si vuole studiare il comportamento di $f(x)$ per x che assume valori arbitrariamente grandi (piccoli). Consideriamo nuovamente la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Si vede che per valori di x molto grandi (molto piccoli), il valore assunto da $f(x)$ diventa sempre più vicino a 0: in altre parole si vede che è possibile scegliere il valore di $f(x)$ prossimo a 0 quanto si vuole pur di scegliere x sufficientemente grande (sufficientemente piccolo) (Fig 3).

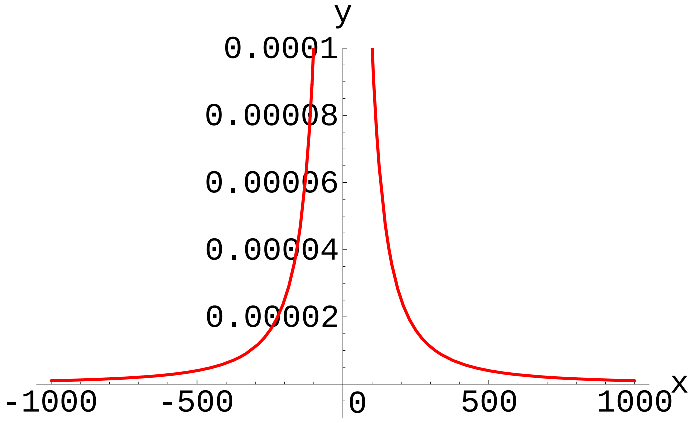


Fig. 3

Questo esempio mostra il comportamento di una funzione che converge per x che tende a $+\infty$ (per x che tende a $-\infty$).

In questi casi le definizioni rigorose di limite, sia attraverso le successioni che attraverso le disuguaglianze sono espresse attraverso la seguente definizione.

Definizione 1.4 *Diremo che la funzione $f(x)$ converge per x che tende a $+\infty$ e scriveremo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ se e solo se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \;:\; \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \textit{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$$

$$\Leftrightarrow \forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, k > 0 \;:\; \forall\, x \in A \quad \textit{con} \quad x > k \quad \textit{risulta} \quad |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Diremo che la funzione $f(x)$ converge per x che tende a $-\infty$ e scriveremo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ se e solo se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \;:\; \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty \quad \textit{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$$

$$\Leftrightarrow \forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, k > 0 \;:\; \forall\, x \in A \quad \textit{con} \quad x < -k \quad \textit{risulta} \quad |f(x) - l| < \epsilon\,. \quad \bullet$$

Consideriamo ora la funzione $f(x) = x^2$. In questo caso si vede che per valori di x molto grandi (molto piccoli), il valore assunto da $f(x)$ diventa anch'esso molto grande: in altre parole possiamo scegliere il vaolore di $f(x)$ arbitrariamente grande pur di scegliere x sufficientemente grande (sufficientemente piccolo) (Fig. 4).

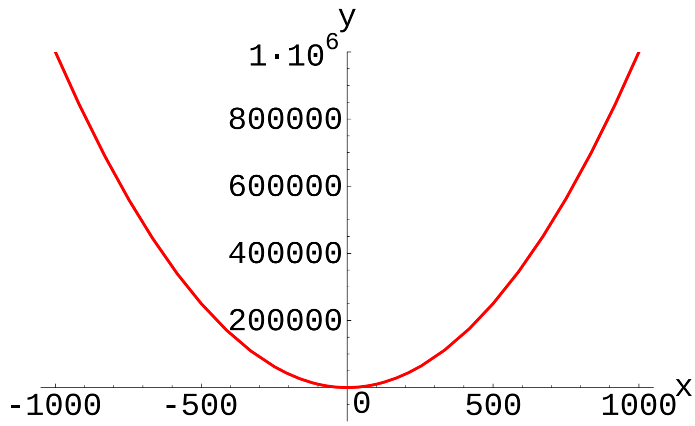


Fig. 4

Questo esempio mostra il comportamento di una funzione che diverge per x che tende a $+\infty$ (per x che tende a $-\infty$).

In questi casi le definizioni rigorose di limite, sia attraverso le successioni che attraverso le disuguaglianze sono espresse attraverso la seguente definizione.

Definizione 1.5 *Diremo che la funzione $f(x)$ diverge positivamente per x che tende a $+\infty$ e scriveremo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \;:\; \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \textit{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall\, M>0 \quad \exists\, k>0 \;:\; \forall\, x \in A \quad \textit{con} \quad x>k \quad \textit{risulta} \quad f(x)>M\,.$$

Diremo che la funzione $f(x)$ diverge positivamente per x che tende a $-\infty$ e scriveremo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \;:\; \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty \quad \textit{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall\, M>0 \quad \exists\, k>0 \;:\; \forall\, x \in A \quad \textit{con} \quad x<-k \quad \textit{risulta} \quad f(x)>M\,.$$

Diremo che la funzione $f(x)$ diverge negativamente per x che tende a $+\infty$ e scriveremo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \;:\; \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \textit{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall\, M>0 \quad \exists\, k>0 \;:\; \forall\, x \in A \quad \textit{con} \quad x>k \quad \textit{risulta} \quad f(x)<-M\,.$$

Diremo che la funzione $f(x)$ diverge negativamente per x che tende a $-\infty$ e scriveremo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \;:\; \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty \quad \textit{risulta} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall\, M>0 \quad \exists\, k>0 \;:\; \forall\, x \in A \quad \textit{con} \quad x<-k \quad \textit{risulta} \quad f(x)<-M\,. \quad \bullet$$

Cerchiamo ora di interpretare graficamente il concetto di limite almeno in alcuni casi.

Consideriamo il caso $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$. Fissato $\epsilon > 0$, tracciamo le rette orizzontali $y = l + \epsilon$ e $y = l - \epsilon$. Allora è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che, se restringiamo x all'intervallo $]x_o - \delta, x_o + \delta[$ e prendiamo $x \neq x_o$, la curva $y = f(x)$ si trova tra le rette $y = l + \epsilon$ e $y = l - \epsilon$ (Fig. 5).

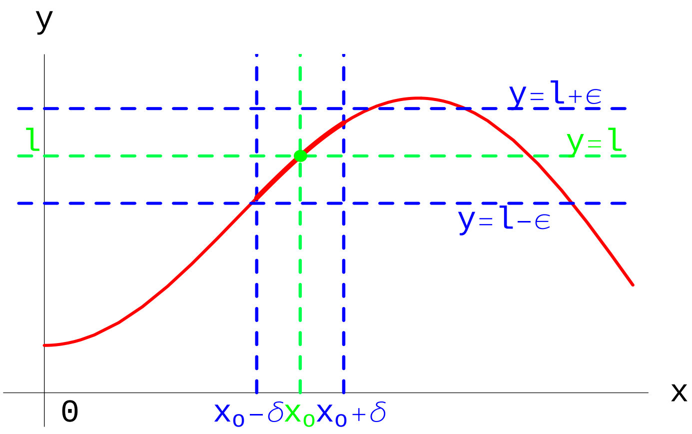


Fig. 5

È chiaro che questo procedimento deve valere per ogni ϵ positivo comunque scelto; inoltre si vede che, prendendo un ϵ più piccolo è necessario un δ più piccolo.

Consideriamo ora il caso $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. Anche qui, fissiamo $\epsilon > 0$ e tracciamo le rette orizzontali $y = l + \epsilon$ e $y = l - \epsilon$. In questo caso è possibile determinare un $k > 0$ tale che, se restringiamo x all'intervallo $]k, +\infty[$, la curva $y = f(x)$ si trova tra le rette $y = l + \epsilon$ e $y = l - \epsilon$ (Fig. 6).

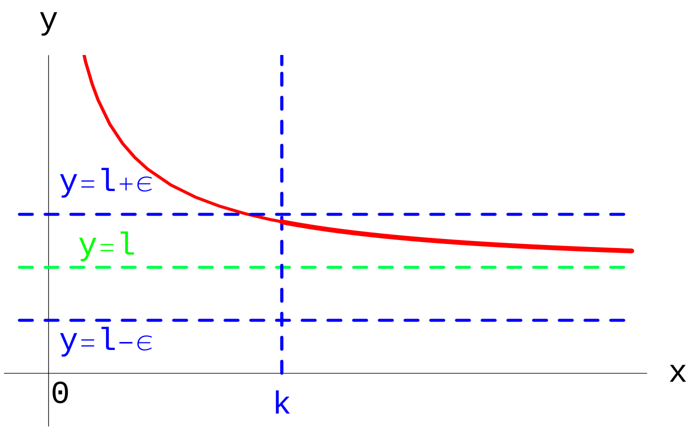


Fig. 6

Questo deve accadere per ogni possibile scelta di ϵ positivo e scegliendo ϵ sempre più piccolo sarà necessario prendere un k sempre più grande.

Consideriamo il caso $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$. Fissato $M > 0$, tracciamo la retta orizzontale $y = M$. Allora è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che, se restringiamo x all'intervallo $]x_o - \delta, x_o + \delta[$

e prendiamo $x \neq x_o$, la curva $y = f(x)$ si trova al di sopra della retta $y = M$ (Fig. 7).

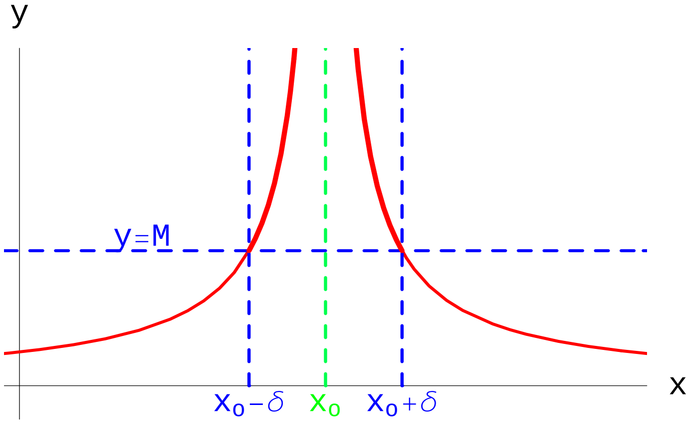


Fig. 7

Questo procedimento deve valere per ogni $M > 0$ e più grande sarà M più piccolo si dovrà scegliere δ.

Consideriamo infine il caso $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Fissiamo $M > 0$ e tracciamo la retta orizzontale $y = -M$. In questo caso è possibile determinare un $k > 0$ tale che, se restringiamo x all'intervallo $]-\infty, -k[$, la curva $y = f(x)$ si trova al di sotto della retta $y = -M$ (Fig. 8).

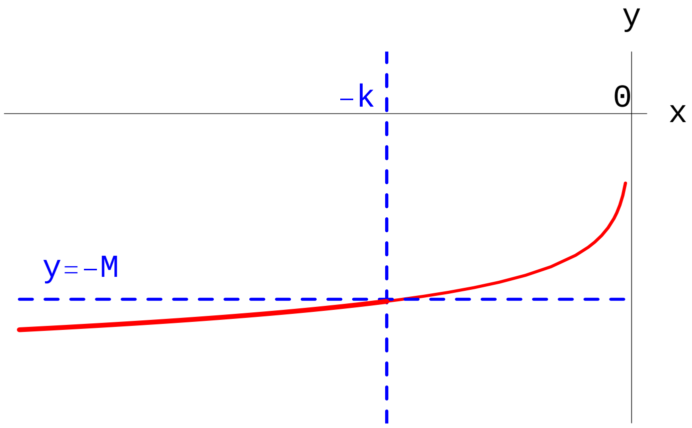


Fig. 8

Anche in questo caso il procedimento deve valere per ogni $M > 0$ e più grande sarà M (quindi più piccolo $-M$), più grande si dovrà scegliere k (e quindi più piccolo sarà $-k$).

Non sempre siamo in grado di analizzare il comportamento di una funzione $f(x)$ quando x si avvicina ad un punto x_o, oppure quando x diventa molto grande (molto piccolo). In questo caso la funzione non sarà dotata di limite per x che tende a x_o oppure per x che tende a $+\infty$ $(-\infty)$. Ad esempio non esiste il limite per x che tende a 0 della funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ e non esistono i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ della funzione $\sin x$: questo accade perché i valori di tali funzioni oscillano indefinitamente tra 1 e -1 per x che tende a 0 nel primo caso e per x che diventa molto grande o molto piccolo negli altri due casi (Fig. 9 - Fig. 10).

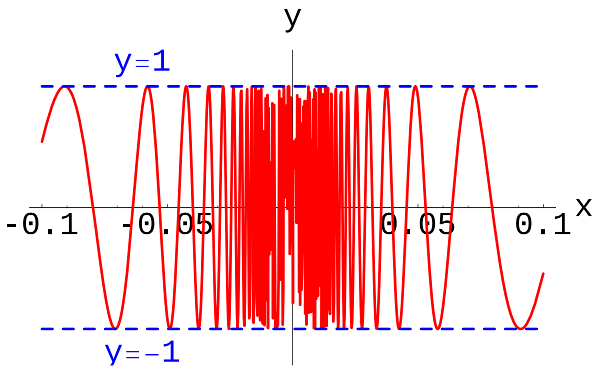


Fig. 9 : $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

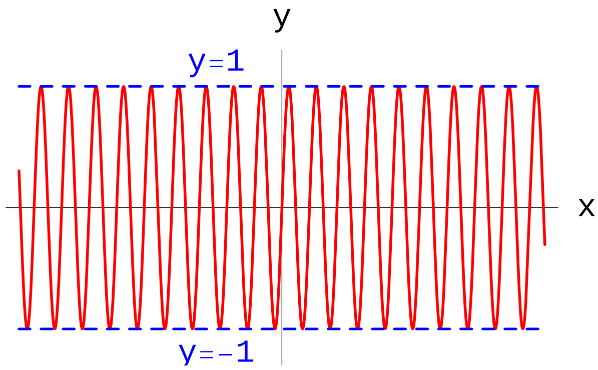


Fig. 10 : $f(x) = \sin x$

Talvolta, tuttavia, può accadere una situazione particolare. Pur non riuscendo a calcolare il limite di $f(x)$ per x che tende ad un punto x_o, si riesce ad analizzare il comportamento della funzione quando x si avvicina a x_o da valori più grandi (cioè da destra) e quando x si avvicina a x_o da valori più piccoli (cioè da sinistra).

Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Tale funzione non è definita in 0 e si vede che non esiste il limite di $f(x)$ per x che tende a 0 (Fig. 11).

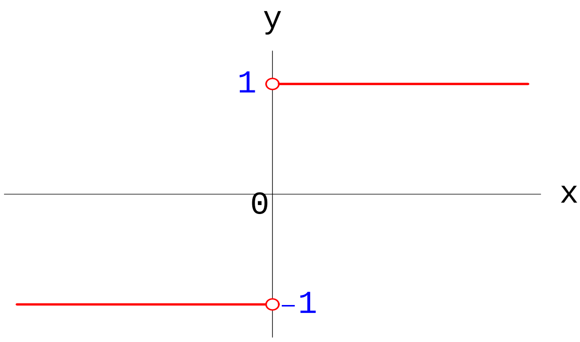


Fig. 11

Si vede che per x che tende a 0 da destra il valore di $f(x)$ si avvicina ad 1, mentre per x che tende a 0 da sinistra il valore di $f(x)$ si avvicina a -1.

Consideriamo ora la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Anche questa funzione non è definita in 0 e non ammette limite in questo punto (Fig. 12).

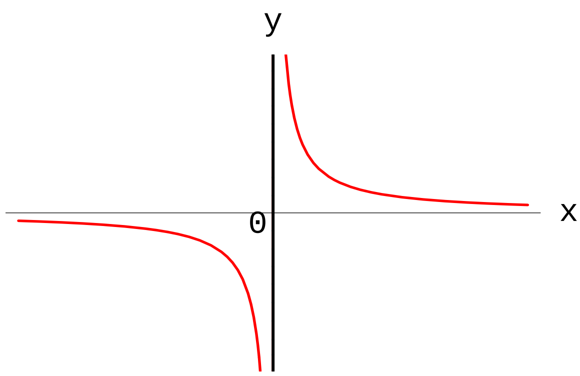


Fig. 12

In questo caso si vede che per x che si avvicina a 0 da destra i valori di $f(x)$ diventano molto grandi, mentre per x che si avvicina a 0 da sinistra i valori di $f(x)$ diventano molto piccoli.

Il comportamento di queste due funzioni suggerisce che talvolta è utile considerare quelli che si chiamano il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto x_o, cioè il limite di $f(x)$ quando ci si avvicina al punto x_o per valori del dominio solo maggiori di x_o e il limite di $f(x)$ quando ci si avvicina a x_o per valori del dominio solo minori di x_o.

In questi casi le definizioni rigorose di limite, che per semplicità esprimiamo solo attraverso le disuguaglianze, sono racchiuse nella seguente definizione.

Definizione 1.6 *Sia x_o un punto interno ad A allora*

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \;:\; \forall\,x \in A \quad \textit{con} \quad x_o < x < x_o + \delta \quad \textit{risulta} \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\,M > 0 \quad \exists\delta > 0 \;:\; \forall\,x \in A \quad \textit{con} \quad x_o < x < x_o + \delta \quad \textit{risulta} \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\,M > 0 \quad \exists\delta > 0 \;:\; \forall\,x \in A \quad \textit{con} \quad x_o < x < x_o + \delta \quad \textit{risulta} \; f(x) < -M$$

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \;:\; \forall\,x \in A \quad \textit{con} \quad x_o - \delta < x < x_o \quad \textit{risulta} \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\,M > 0 \quad \exists\delta > 0 \;:\; \forall\,x \in A \quad \textit{con} \quad x_o - \delta < x < x_o \quad \textit{risulta} \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\,M > 0 \; \exists\delta > 0 \;:\; \forall\,x \in A \;\; \textit{con} \;\; x_o - \delta < x < x_o \;\; \textit{risulta} \;\; f(x) < -M. \;\; \bullet$$

Confrontando la definizione di limite con quella di limite destro e sinistro, si vede che una funzione è dotata di limite in un punto x_o interno ad A se e solo se il limite destro e il limite sinistro sono uguali e coincidono con il valore del limite di $f(x)$ in x_o, cioè

$$\exists \lim_{x\to x_o} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = \lim_{x\to x_o} f(x)\,.$$

Di seguito sono riportati i grafici di tre funzioni che non ammettono limite in un punto x_o del loro dominio, ma che ammettono in esso limite destro e sinistro, ovviamente distinti (Fig. 13 - Fig. 14 - Fig. 15)

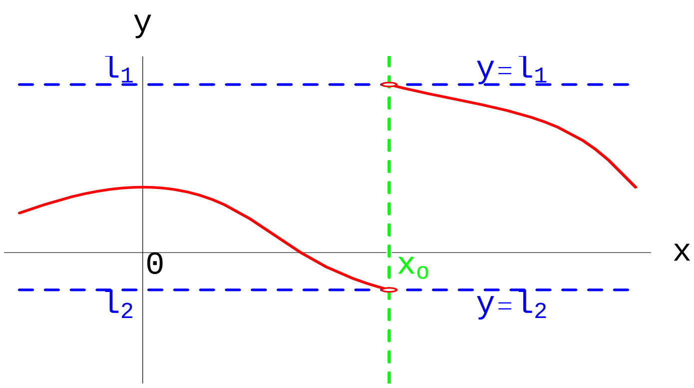


Fig. 13 $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = l_1$ $\lim_{x\to x_o^-} f(x) = l_2$

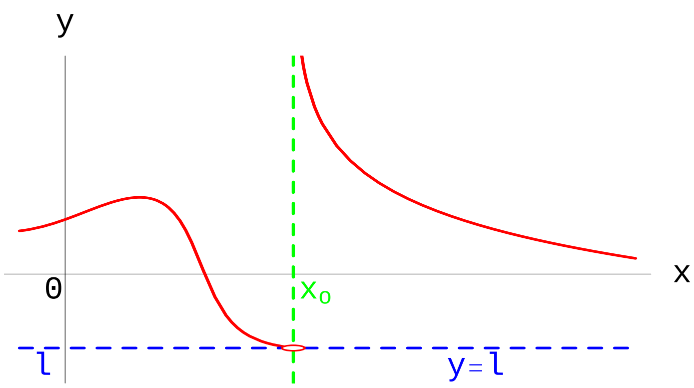


Fig. 14 $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to x_o^-} f(x) = l$

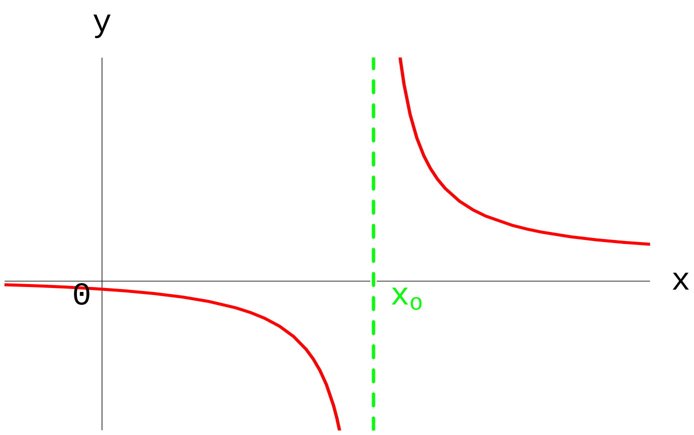


Fig. 15 $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to x_o^-} f(x) = -\infty$

2 Proprietà dei limiti di funzioni

Poiché i limiti di funzioni sono definiti a partire dai limiti di successioni, per essi valgono le proprietà già viste per i limiti di successioni. Richiamiamo le più importanti.

Teorema 2.1 *(Unicità del limite) Se esiste il limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a x_o (o per x che tende a $+\infty$ o per x che tende a $-\infty$), tale limite è unico.* •

Teorema 2.2 *(Operazioni sui limiti) Il limite della somma, differenza, prodotto o quoziente di due funzioni convergenti è uguale alla somma, differenza, prodotto o quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti.* •

Come nel caso delle successioni, il precedente teorema può in qualche modo essere esteso al caso in cui una o entrambe le funzioni divergono: restano sempre escluse le forme indeterminate

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}\,.$$

Sappiamo che le funzioni, talvolta possono essere anche combinate tra loro per dare origine ad una nuova funzione, la funzione composta. Analizziamo ora come si comporta l'operazione di limite con questo tipo di operazione.

Teorema 2.3 *(Limite di una funzione composta) Siano $g : X \to Y$ e $f : Y \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $\lim_{x\to x_o} g(x) = y_o$ e $\lim_{y\to y_o} f(y) = l$. Supponiamo inoltre che esista un $\delta > 0$ tale che $g(x) \neq y_o$ per ogni $x \in X \setminus \{x_o\}$ tale che $|x - x_o| < \delta$. Allora risulta $\lim_{x\to x_o} f(g(x)) = l$.* •

Il precedente teorema continua a valere se in luogo di x_o o di y_o si calcolano i limiti per x o y che tendono a $+\infty$ o a $-\infty$.

3 Alcuni limiti fondamentali

Abbiamo visto che i limiti di funzioni sono definiti a partire dai limiti di successioni. Utilizzando il teorema sulla regolarità delle successioni monotone e le proprietà delle funzioni elementari, possiamo determinare il comportamento di tali funzioni agli estremi del loro intervallo di definizione limitandoci al caso in cui questo non appartiene all'intervallo stesso.

⋆ $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

⋆ $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

⋆ $\lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$

⋆ $\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$

⋆ $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

⋆ $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \in \mathbb{N}_p \\ -\infty & \text{se } n \in \mathbb{N}_d \end{cases}$

⋆ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⋆ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\star \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{se } n \in \mathbb{N}_p$

$\star \quad \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \quad \text{se } n \in \mathbb{N}_d$

$\star \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}_d)$

$\star \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}_d)$

$\star \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

$\star \quad \lim_{x\to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}_d)$

$\star \quad \lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

$\star \quad \lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

$\star \quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

$\star \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

$\star \quad \nexists \lim_{x\to +\infty} \sin x$

$\star \quad \nexists \lim_{x\to -\infty} \sin x$

$\star \quad \nexists \lim_{x\to +\infty} \cos x$

$\star \quad \nexists \lim_{x\to -\infty} \cos x$

$\star \quad \nexists \lim_{x\to +\infty} \tan x$

$\star \quad \nexists \lim_{x\to -\infty} \tan x$

$\star \quad \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \tan x = -\infty \quad (k \in \mathbb{N})$

$\star \quad \lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tan x = +\infty \quad (k \in \mathbb{N})$

$\star \quad \lim_{x\to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\star \quad \lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$

4 Funzioni continue

Consideriamo una generica funzione $f(x)$ definita in A, dove A è costituito da un intervallo o dall'unione di più intervalli. Sia x_o un punto di A. Abbiamo visto che per determinare il valore del limite di $f(x)$ per x che tende a x_o, non abbiamo fatto nessun riferimento al valore che $f(x)$ assume nel punto x_o (ammesso che f sia definita in x_o) ma solo ai valori che f assume in un opportuno intorno di x_o. Se f è definita in x_o ci si può chiedere se esiste un legame tra il valore del limite di f in x_o e il valore di $f(x_o)$. La classe di funzioni per cui questi due valori coincidono è chiamata la classe delle funzioni continue. Vedremo come la definizione matematica di continuità corrisponda proprio al significato che quotidianamente si attribuisce alla parola continuo: *un processo è continuo se procede gradualmente, senza interruzioni o bruschi cambiamenti.*

Definizione 4.1 *Una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_o appartenente al suo dominio di definizione se $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$. In particalare f è continua nel suo insieme di definizione se è continua in ogni suo punto.* •

La definizione di continuità afferma che f è continua in un punto x_o se $f(x)$ si avvicina a $f(x_o)$ al tendere di x ad x_o. Ne segue che una funzione continua ha la proprietà che un lieve cambiamento della variabile indipendente x induce un lieve cambiamento di $f(x)$.

Geometricamente il grafico di una funzione continua in ogni punto del suo intervallo di definizione è una funzione senza interruzioni: il suo grafico in quell'intervallo può essere disegnato senza staccare la penna dal foglio.

Per capire meglio questo fenomeno bisogna analizzare meglio il comportamento di f nei punti in cui non è continua. È chiaro che se f non è continua in un punto x_o vuol dire che il limite di f per x che tende ad x_o è diverso da $f(x_o)$ oppure non esiste. In questo caso si parla di punto di discontinuità per f.

Definizione 4.2 *Sia f una funzione definita in A e sia x_o un punto di A in cui f non è continua. Diremo che x_o è un punto di discontinuità*

i) eliminabile, se esiste finito il limite di f per x che tende ad x_o ma è diverso da $f(x_o)$;

ii) di prima specie, se esistono finiti il limite destro e sinistro di f in x_o ma sono distinti;

iii) di seconda specie, se almeno uno tra il limiti destro e sinistro o è infinito o non esiste. •

Il primo caso di discontinuità è detta eliminabile in quanto cambiando il valore di $f(x)$ in x_o e ponendolo uguale al limite di f in x_o, la funzione così modificata risulta continua in x_o. Nella discontinuità di prima specie si dice che la funzione f ha un salto in x_o, dove per salto si intende la differenza tra il limite destro e il limite sinistro di f in x_o.

Analizziamo questi tre tipi di discontinuità con tre esempi.

Consideriamo la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Tale funzione ha una discontinuità eliminabile in $x_o = 1$. Infatti si può vedere che $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ mentre $f(1) = 0$ (Fig. 16).

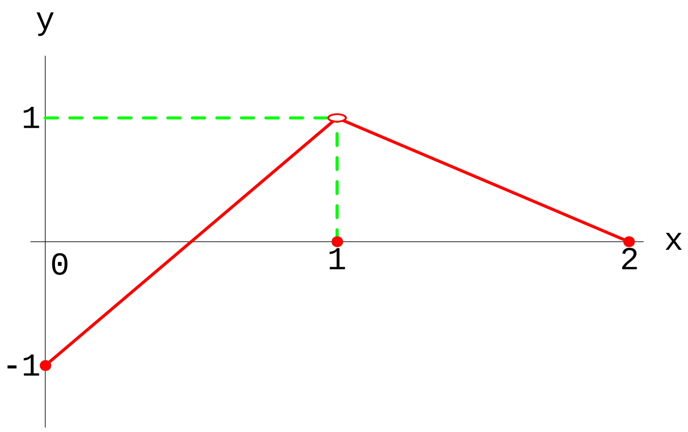


Fig. 16

Consideriamo ora la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Tale funzione ha una discontinuit di seconda specie nel punto $x_o = 0$. Infatti si può provare che $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$ (Fig. 17).

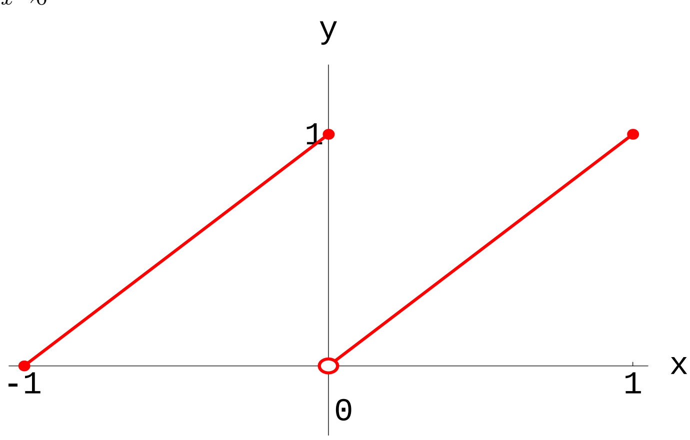


Fig. 17

In questo caso il salto di f in $x_o = 0$ è pari a -1.

Consideriamo infine la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Tale funzione ha una discontinuità di seconda specie in $x_o = 0$. Infatti risulta che $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ (Fig. 18).

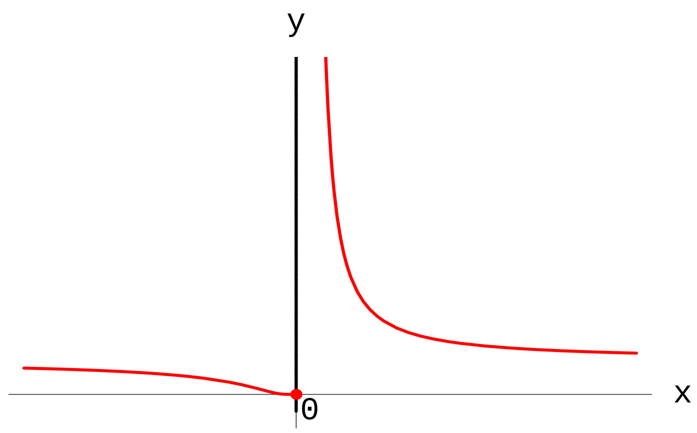


Fig. 18

5 Proprietà delle funzioni continue

La classe delle funzioni continue gode di una serie di proprietà che la rendono una delle più importanti classi di funzioni.

Dai teoremi sulle operazioni sui limiti di funzioni e da quello sui limiti delle funzioni composte seguono i due seguenti importanti risultati.

Teorema 5.1 *Siano* f_1 *e* f_2 *due funzioni continue in un punto* x_o*. Allora risultano continue in* x_o *anche le funzioni* $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 \cdot f_2$ *e se* $f_2(x_o) \neq 0$, *anche la funzione* $\frac{f_1}{f_2}$. •

Teorema 5.2 *Se* g *è una funzione continua in un punto* x_o *e* f *è continua in* $y_o = f(x_o)$, *allora la funzione composta* $f \circ g$ *è continua in* x_o. •

Un ulteriore risultato molto importante nell'ambito della classe delle funzioni continue è il seguente teorema.

Teorema 5.3 *Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione.* •

Dal teorema della permanenza del segno per le successioni segue il seguente teorema sulla permanenza del segno per le funzioni continue.

Teorema 5.4 *Sia* f *una funzione continua in un punto* x_o *interno ad* A. *Se* $f(x_o) > 0$ *allora esiste un* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in]x_o - \delta, x_o + \delta[$. •

È chiaro che se $f(x_o) < 0$, allora esisterà un intorno di x_o in cui la f assumerà valore negativo. Tale teorema ha un corollario molto importante.

Corollario 5.5 *Sia f una funzione continua in x_o. Supponiamo che esista un intorno di x_o in cui $f(x)$ assume valori maggiori o uguali a 0, allora risulterà $f(x_o) \geq 0$.* •

Consideriamo ora l'equazione

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

dove f è una funzione definita in un intervallo chiuso $[a, b]$. Risolvere l'equazione (1) significa determinare tutti i numeri reali $x_o \in [a, b]$ per cui $f(x_o) = 0$; tali numeri si chiamano soluzioni dell'equazione (1). Il seguente teorema fornisce uno strumento utile per l'esistenza di una soluzione dell'equazione (1).

Teorema 5.6 *(Teorema degli zeri) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora esiste un punto $x_o \in]a, b[$ tale che $f(x_o) = 0$.* •

Se la funzione f non è continua nell'intervallo $[a, b]$, allora non è detto che esista un punto x_o interno all'intervallo in cui la f si annulla.

Il significato geometrico di questo teorema è ovvio. Nell'ipotesi del teorema, i punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ si trovano uno nel semispazio positivo e l'altro nel semispazio negativo: poiché la funzione è continua, si deve poter passare da un punto all'altro con continuità e quindi necessariamente si deve intersecare l'asse delle x, cioè trovare un punto x_o per cui $f(x_o) = 0$ (Fig. 19).

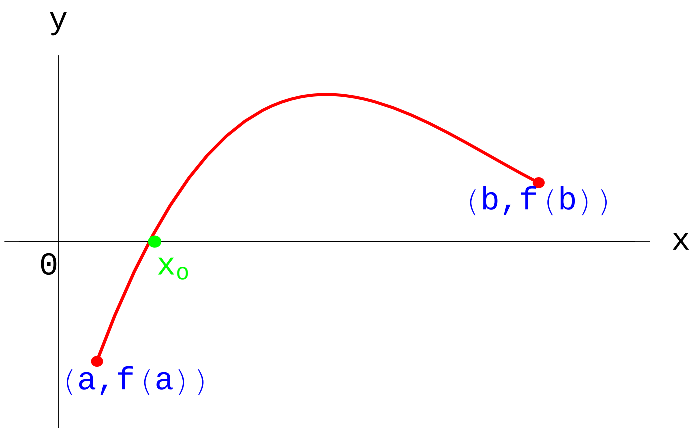


Fig. 19

I due seguenti teoremi forniscono delle proprietà sull'insieme delle immagini di una funzione continua.

Teorema 5.7 *(Teorema di Weierstrass) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$.* •

I punti x_1 e x_2 del precedente teorema sono detti rispettivamente punto di minimo e punto di massimo per f nell'intervallo $[a, b]$ e i corrispondenti valori $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ sono detti minimo e massimo di f in $[a, b]$ (Fig. 20).

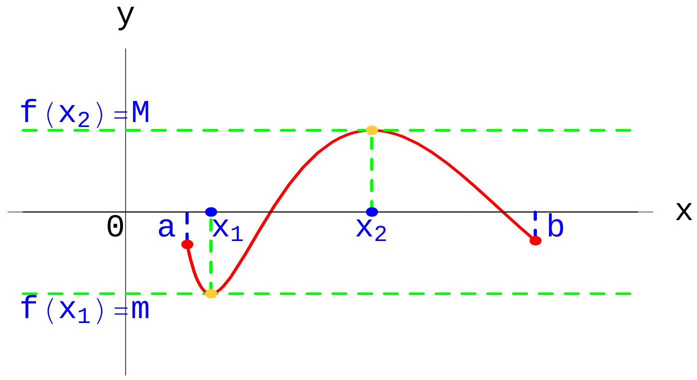


Fig. 20

In altre parole il minimo e il massimo di una funzione non sono altro che il valore minimo e il valore massimo che la funzione può assumere al variare di x in $[a, b]$. Non tutte le funzioni sono dotate di minimo e massimo: il teorema di Weierstrass ne garantisce l'esistenza ma solo per funzioni continue su intervalli chiusi e limitati. Se una di queste condizioni viene a mancare, la continuità o il dominio chiuso e limitato, la funzione potrebbe non avere minimo e massimo.

Teorema 5.8 *(Teorema del valor medio) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia y_o un qualunque numero compreso strettamente tra $f(a)$ e $f(b)$. Allora esiste un punto $x_o \in]a, b[$ tale che $f(x_o) = y_o$. In altre parole f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.* •

Da un punto di vista geometrico questo teorema afferma che il grafico di f deve necessariamente intersecare ogni retta orizzontale $y = y_o$ assegnata tra le rette di equazione $y = f(a)$ e $y = f(b)$ (Fig. 21).

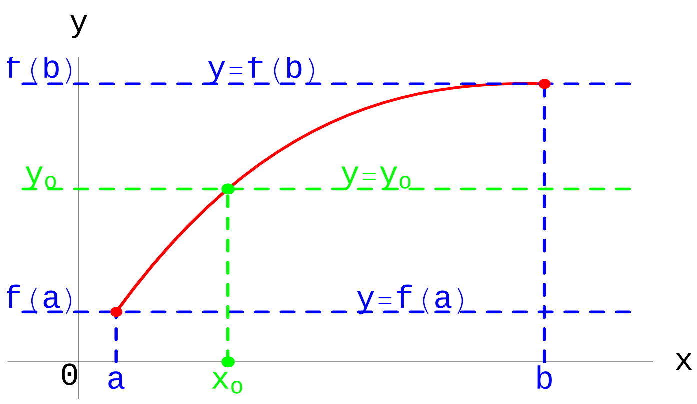


Fig. 21

6 Limiti notevoli

Dalla continuità delle funzioni elementari e dal teorema sui limiti delle funzioni composte è possibile calcolare alcuni limiti di funzioni che si presentano in forma indeterminata.

Iniziamo con una osservazione. Consideriamo una particolare funzione composta, la funzione che ad ogni x in un opportuno intervallo A associa la funzione $h(x) = \big(f(x)\big)^{g(x)}$. Osserviamo che

$$\big(f(x)\big)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot log(f(x))} \qquad \forall\, x \in A\,.$$

Dunque se esistono i limiti di f e g per x che tende a x_o, dalla continuità delle funzioni esponenziale e logaritmo è possibile calcolare anche il limite della funzione h per x che tende a x_o. In particolare se i limiti di f e g in x_o sono entrambi finiti e non contemporaneamente nulli, allora risulta

$$\lim_{x\to x_o} h(x) = \Big(\lim_{x\to x_o} f(x)\Big)^{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}.$$

Negli altri casi, se è possibile calcolare il limite del prodotto $g(x)\cdot log(f(x))$, sia esso y_o (reale oppure $+\infty$ o $-\infty$), allora si avrà

$$\lim_{x\to x_o} h(x) = \lim_{x\to x_o} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \lim_{x\to x_o} e^{g(x)\cdot log(f(x))} = \lim_{y\to y_o} e^{y}\,.$$

Tutto quello osservato sino ad ora rimane ancora valido se si calcolano limiti per x che tende a $+\infty$ o per x che tende a $-\infty$.

Tenendo presente la forma indeterminata del prodotto, si evince che le funzioni del tipo f^g danno origine alle forme indeterminate

$$0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty\,.$$

Un forma indeterminata di questo tipo viene fuori dal calcolo del limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)^x$. Dal limite notevole delle successioni $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n = e$ e da alcune proprietà sui limiti di funzioni, si può provare che anche il precedente limite vale e.

A partire da questo limite è possibile calcolare tutta una serie di limiti che si presentano in forma indeterminata e che si chiamano limiti notevoli:

- ⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^x = e$
- ⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(1+\dfrac{\alpha}{x}\Big)^x = e^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
- ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^x = e$
- ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(1+\dfrac{\alpha}{x}\Big)^x = e^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

- $\star \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\star \quad \lim_{x\to 0}(1+\alpha\, x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
- $\star \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \qquad (a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\})$
- $\star \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a \qquad (a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\})$
- $\star \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\,.$

Dalle proprietà delle funzioni trigonometriche e sempre dalle proprietà dei limiti di funzioni, si riesce a provare che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

A partire da questo limite, si deducono altri limiti notevoli che riguardano le funzioni trigonometriche e quelle inverse.

- $\star \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\star \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$
- $\star \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\star \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\star \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1\,.$

Capitolo VI
Calcolo differenziale

1 Derivata di una funzione

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ e un punto P_o di coordinate $(x_o, f(x_o))$ sul grafico di f. Vogliamo definire, se è possibile, la retta tangente al grafico di f nel punto P_o.
Consideriamo un altro punto P_h di coordinate $(x_o + h, f(x_o + h))$ sul grafico di f e la retta secante passante per i punti P_o e P_h. Tale retta secante ha pendenza (o coefficiente angolare) pari a $m_h = \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{(x_o+h)-x_o} = \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ ed equazione $y = f(x_o) + m_h\,(x - x_o)$.

Facendo muovere $x_o + h$ verso x_o, il punto P_h si muove sul grafico di f verso il punto P_o e per $x_o + h = x_o$ si sovrappone a P_o. Contemporaneamente la pendenza della relativa retta secante cambia: se al tendere di $x_o + h$ a x_o il coefficiente angolare m_h tende ad un valore definito, possiamo definire la retta tangente al grafico di f nel punto P_o come la retta passante per P_o ed avente come coefficiente angolare m tale valore, cioè $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ (Fig. 1 - Fig. 2).

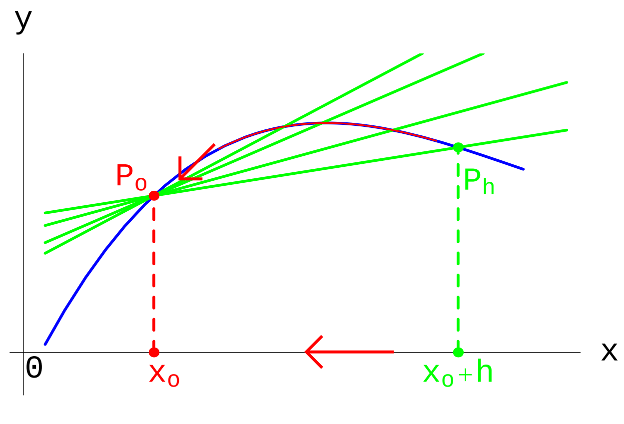


Fig. 1

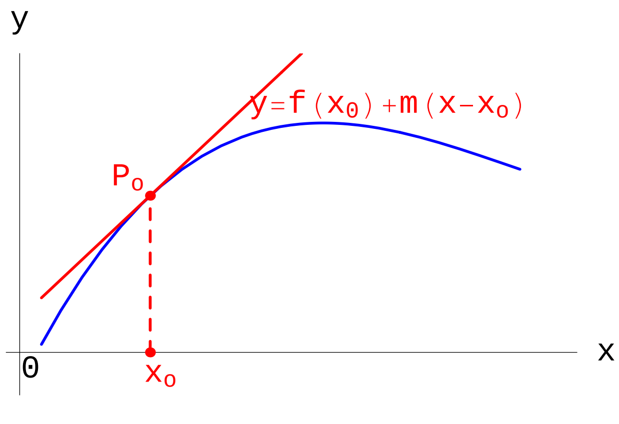


Fig. 2

In questo caso l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto P_o di coordinate $(x_o, f(x_o))$ ha equazione $y = f(x_o) + m\,(x - x_o)$.

Per definire la retta tangente al grafico di una funzione abbiamo dovuto calcolare il limite di una certa quantità. Questa quantità si presenta sotto forma di un rapporto: al denominatore c'è l'incremento della variabile indipendente (tale incremento è pari ad h se x varia da x_o a $x_o + h$) e al numeratore c'è l'incremento della variabile dipendente (tale incremento è pari a

$f(x_o+h)-f(x_o))$. Questo rapporto viene chiamato rapporto incrementale della funzione f nel punto x_o. In base alle osservazioni fatte precedentemente, per poter definire la retta tangente in P_o è stato quindi necessario fare il limite del rapporto incrementale della f in x_o.

Il limite del rapporto incrementale di una funzione è alla base di quella che si chiama la derivata della funzione in un punto: vedremo come tale concetto matematico non è utile solo per poter definire la retta tangente al grafico della funzione, ma sarà uno strumento essenziale per studiare le proprirетà qualitative della funzione stessa.

Definizione 1.1 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia x un punto di $]a,b[$. Diremo che f è derivabile in x se esiste finito il limite del rapporto incrementale della funzione nel punto x per l'incremento che tende a 0, cioè se esiste finito il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.* •

Tale limite è chiamato la derivata di f in x e si indica con uno dei simboli

$$f'(x) \qquad \frac{d\,f}{d\,x} \qquad y'(x)\,.$$

La funzione f si dirà derivabile nell'intervallo aperto $]a,b[$ se è derivabile in ogni punto $x \in]a,b[$.

In alcuni casi è utile considerare, come per i limiti di funzioni, soltanto il limite destro (per h che tende a 0^+) oppure il limite sinistro (per h che tende a 0^-) del rapporto incrementale. Con queste considerazioni, possiamo definire anche la derivabilità di f nei punti $x=a$ e $x=b$. In particolare diremo che f è derivabile in a se esiste finito il limite $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mentre è derivabile in b se esiste finito il limite $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.
In questo modo abbiamo definito la derivabilità di f in tutto l'intervallo $[a,b]$.

Confrontiamo ora la nozione di derivabilità con quella di continuità.

Teorema 1.2 *(Continuità delle funzioni derivabili) Se f è derivabile in un punto x allora f è continua in x.*

Dimostrazione - Provare che f è continua in x equivale a far vedere che $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Risulta che

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} [f(x+h)-f(x)+f(x)] = \lim_{h\to 0} \Big[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h + f(x)\Big]\,.$$

Poiché f è derivabile in x, allora $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \in \mathbb{R}$ e, quindi dalle operazioni sui limiti, segue che

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f'(x)\cdot 0 + f(x) = f(x)\,. \quad \bullet$$

Il viceversa del precedente teorema non è vero. Vi sono funzioni continue in punti in cui non risultano derivabili. Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$. Tale funzione sappiamo essere continua in $x = 0$, tuttavia essa non risulta essere derivabile in tale punto. Infatti il rapporto incrementale di f nel punto 0 vale $\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$. Dunque risulta

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \qquad\qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1\,,$$

e quindi non esiste il limite $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$, cioè la funzione non è derivabile in $x = 0$.

Osserviamo che se una funzione f è derivabile in tutti i punti di un intervallo $]a, b[$, allora è possibile definire una nuova funzione, chiamata funzione derivata prima, che si indica con f', che ad ogni punto x di $]a, b[$ associa il valore della derivata in quel punto, cioè associa $f'(x)$. Se questa funzione a sua volta risulta derivabile, la sua derivata si chiama derivata seconda di f e si indica con f''.

2 Regole di derivazione

Vogliamo vedere come si comporta l'operazione di derivazione con le operazioni algebriche.

Teorema 2.1 *(Operazioni con le derivate) Siano f e g due funzioni derivabili in un punto x. Allora risultano derivabili in x anche le funzioni $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e, se $g(x) \neq 0$ anche la funzione $\frac{f}{g}$. In particolare si ha*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad\qquad (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad\qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}\,.$$

Dimostrazione - Dimostriamo la regola di derivazione della somma. Per $h \neq 0$, costruiamo il rapporto incrementale della funzione somma $f+g$ nel punto x. Si ha

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \tag{1}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\,.$$

Passando al limite per h che tende a 0 nella (1) e tenendo presente la derivabilità delle funzioni f e g nel punto x, si ha

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)\,. \quad \bullet$$

Una delle più importanti regole di derivazione è quella relativa alla derivazione delle funzioni composte.

Teorema 2.2 *(Derivata di una funzione composta) Sia g una funzione derivabile in x e sia f una funzione derivabile in $g(x)$. Allora la funzione composta $f\circ g$ è derivabile in x e risulta*

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)\,. \quad \bullet$$

3 Derivate delle funzioni elementari

Di seguito riportiamo le derivate delle funzioni elementari, specificando ogni volta l'insieme dei punti in cui la funzione risulta derivabile.

i) $f(x)=x^n \ (n\in\mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1} \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$

ii) $f(x)=|x| \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{|x|}{x} \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

iii) $f(x)=a^x \ (a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=a^x\cdot\log a \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$

iv) $f(x)=\log_a x \ (a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log a} \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}_+$

v) $f(x)=x^b \ (b\in\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=b\cdot x^{b-1} \qquad \forall\, x\neq 0$

vi) $f(x)=\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\cos x \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$

vii) $f(x)=\cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\sin x \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$

viii) $f(x)=\tan x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{(\cos x)^2} \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi\}$

ix) $f(x)=\arcsin x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x\in\,]-1,1[$

x) $f(x)=\arccos x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x\in\,]-1,1[$

xi) $f(x)=\arctan x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$

Dimostriamo alcune delle precedenti derivate. Iniziamo col provare la i). Questa derivata si prova attraverso il principio di induzione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Per $n = 1$, risulta

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1\,,$$

e quindi la formula è vera. Supponiamo ora che essa sia vera per n, cioè $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, e proviamola per $n + 1$. Dalla formula di derivazione di un prodotto di funzioni e dall'ipotesi di induzione si ha

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1) \cdot x^n\,.$$

Dunque la derivata della funzione potenza n-esima resta provata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Proviamo la ii). Sappiamo già che la funzione valore assoluto non è derivabile in $x = 0$. Vogliamo provare che negli altri punti la sua derivata vale $f'(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.
Fissiamo $x > 0$. Per $h \neq 0$ sufficientemente piccolo tale da aversi $x + h > 0$, risulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1\,.$$

Fissiamo ora $x < 0$. Sempre per $h \neq 0$ e sufficientemente piccolo tale da risultare $x + h < 0$, risulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x - h + x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1\,.$$

Dunque la ii) resta provata.

Proviamo ora che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $(a^x)' = a^x \cdot loga$. A tale scopo, fissato $x \in \mathbb{R}$ osserviamo che utilizzando i limiti notevoli si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot loga\,.$$

Proviamo ora che per ogni $x \in \mathbb{R}_+$ la derivata della funzione $f(x) = log_a x$ è $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}$.
Fissato $x \in \mathbb{R}_+$, utilizzando le proprietà dei logaritmi e i limiti notevoli, risulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a \Big(\frac{x+h}{x}\Big) = \lim_{h \to 0} \log_a \Big(\frac{x+h}{x}\Big)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \log_a \Big(1 + \frac{h}{x}\Big)^{\frac{1}{h}} = \log_a (e)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}\,.$$

4 Applicazioni delle derivate

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Ricordiamo che la funzione f è dotata di minimo se esiste un punto $x_1 \in [a, b]$ tale che $f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$, mentre diremo che f è dotata di massimo se esiste un punto $x_2 \in [a, b]$ tale che $f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$. In altre parole la funzione f è dotato di minimo (massimo) se esiste il più piccolo (grande) dei valori assunti da f per x che varia in $[a, b]$. Tali valori si chiamano anche minimo e massimo assoluto della funzione f in $[a, b]$ e i rispettivi punti x_1 e x_2 punti di minimo e massimo assoluto della funzione f.
La caratteristica del precedente punto x_1 (x_2) è quella che il valore assunto dalla funzione in esso è più piccolo (più grande) degli altri valori che la funzione assume al variare di x in tutto l'intervallo $[a, b]$. Ora possono esistere all'interno dell'intervallo $[a, b]$ dei punti x_1 (x_2) che godono di una simile proprietà ma non al variare di tutti gli x in $[a, b]$, ma solo per le x abbastanza vicine a x_1 (x_2). In questo caso è ovvio che non si può più parlare di punti di minimo o massimo assoluto per la funzione, in quanto la proprietà ha un carattere locale e quindi si parlerà di punti di minimo e massimo relativo per la funzione (Fig. 3 - Fig. 4).

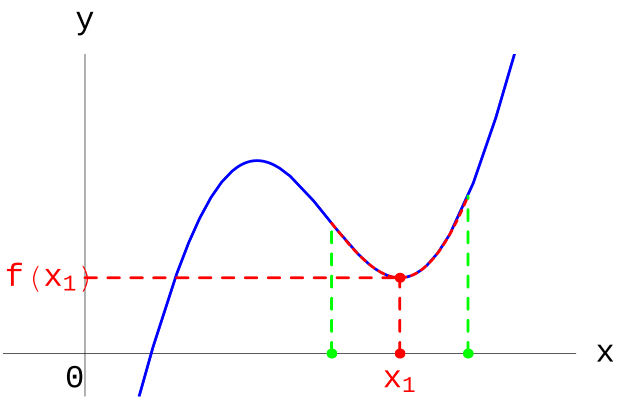


Fig. 3 x_1 punto di minimo relativo

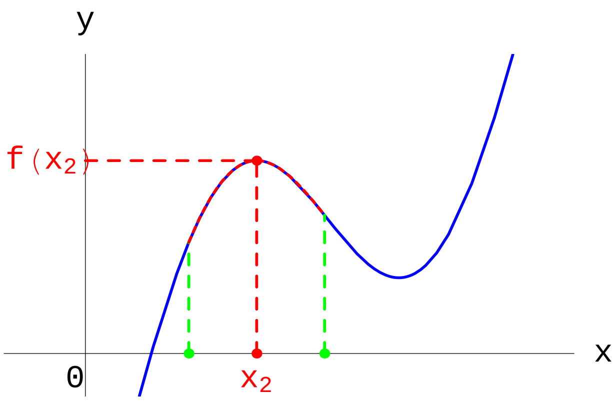


Fig. 4 x_2 punto di massimo relativo

Definizione 4.1 *Diremo che un punto $x_o \in [a, b]$ è un punto di minimo relativo per la funzione f se esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x_o) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ con $|x - x_o| < \delta$, cioè se esiste un intorno di x_o in cui il valore $f(x_o)$ risulta il valore più piccolo assunto da f in quell'intorno.* •

Definizione 4.2 *Diremo che un punto $x_o \in [a, b]$ è un punto di massimo relativo per la funzione f se esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in [a, b]$ con $|x - x_o| < \delta$, cioè se esiste un intorno di x_o in cui il valore $f(x_o)$ risulta il valore più grande assunto da f in quell'intorno.* •

Il nostro scopo sarà ora quello di individuare delle tecniche per la determinazione dei punti di minimo e massimo relativo di una funzione. Iniziamo prima con una condizione necessaria.

Teorema 4.3 *(Teorema di Fermat) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_o \in]a,b[$ un punto di massimo (minimo) relativo per f. Se f è derivabile in x_o, allora $f'(x_o) = 0$.*

Dimostrazione - Sia $x_o \in]a,b[$ un punto di massimo per la funzione f. Allora, in base alla definizione, esisterà un $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_o) \quad \forall\, x \in [a,b]$ con $|x - x_o| < \delta$. Se poniamo $h = x - x_o$, la precedente relazione si può riscrivere nella forma

$$\exists\, \delta > 0 \qquad f(x_o + h) \leq f(x_o) \qquad \forall\, h \quad : \quad |h| < \delta\,.$$

Analizzando il rapporto incrementale della funzione in x_o, per $h \neq 0$, si osserva che

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se} \quad 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se} \quad -\delta < h < 0 \end{cases}.$$

Passando al limite per h che tende a 0 e tenendo presente la conseguenza del teorema della permanenza del segno si ha

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \leq 0 \qquad\qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \geq 0\,.$$

Ma la f è derivabile in x_o e quindi i due precedenti limiti devono essere uguali a $f'(x_o)$. Di conseguenza l'unica possibilità è che risulti $f'(x_o) = 0$. $\bullet$

Il precedente teorema afferma dunque che se x_o è un punto di massimo o di minimo relativo interno alla funzione, punto in cui la f è derivabile, allora la derivata in questo punto è nulla. Il viceversa di questo teorema è falso, nel senso che se una funzione ammette un punto interno in cui la derivata prima si annulla, non è detto che tale punto sia un punto di massimo o di minimo relativo per la funzione. Basti pensare alla funzione $f(x) = x^3$; la derivata prima di tale funzione si annulla nel punto $x_o = 0$, ma tale punto non risulta essere né di massimo né di minimo relativo per la funzione f.

Un'importante conseguenza del teorema di Fermat è il seguente teorema, il quale, come si vedrà dalla dimostrazione, ci può aiutare a determinare gli eventuali punti di massimo e minimo di una funzione.

Teorema 4.4 *(Teorema di Rolle) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto $x_o \in]a,b[$ tale che $f'(x_o) = 0$.*

Dimostrazione - Poiché f è continua in $[a,b]$, per il teorema di Weierstarss f è dotata di minimo e massimo assoluti in $[a,b]$. Siano x_1 e x_2 i punti di $[a,b]$ in cui la f assume rispettivamente il valore minimo e massimo. Se accade che tali punti coincidono con gli estremi a e b, allora dall'ipotesi $f(a) = f(b)$ ne segue che per tale funzione il minimo coincide con il massimo e dunque la funzione è costante. Poiché per una funzione costante la derivata è ovunque nulla, il teorema sarebbe in questo caso dimostrato. Supponiamo allora che almeno uno tra i punti x_1 e x_2 sia interno all'intervallo $[a, b]$. Per il teorema di Fermat, in corrispondenza di tale punto la derivata prima si annulla e quindi anche in questo caso il teorema è provato. •

Il teorema di Rolle ha anche un'interpretazione geometrica. Se $f(a) = f(b)$, allora vi è un punto $x_o \in]a, b[$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_o, f(x_o))$ è orizzontale e quindi parallela alla retta per i punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (Fig. 5).

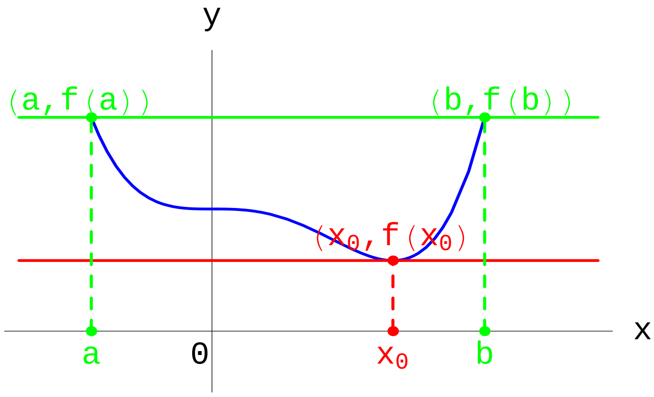


Fig. 5

Ci si può chiedere se la precedente proprietà geometrica continui a valere anche se $f(a) \neq f(b)$. Questo è quello che afferma il seguente teorema.

Teorema 4.5 *(Teorema di Lagrange) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste un punto $x_o \in]a, b[$ tale che $f'(x_o) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.* •

Geometricamente, dunque, il teorema di Lagrange afferma che esiste un punto $x_o \in]a, b[$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_o, f(x_o))$ è parallela alla retta secante passante per i punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (Fig. 6).

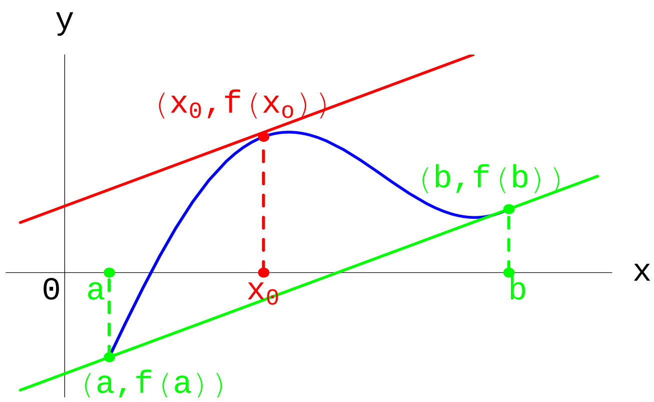


Fig. 6

L'importanza principale del teorema di Lagrange è che ci permette di ottenere informazioni su una funzione usando informazioni sulla sua funzione derivata prima. Le prime informazioni riguardano la monotonia.

Teorema 4.6 *(Criterio di monotonia) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora*

i) f è crescente in $[a,b]$ $\quad\Leftrightarrow\quad f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in]a,b[$

ii) f è decrescente in $[a,b]$ $\quad\Leftrightarrow\quad f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in]a,b[\,.$

Dimostrazione - Dimostriamo la i). Supponiamo prima che f sia crescente in $[a,b]$. Fissiamo $x \in]a,b[$ e $h > 0$ tale che $x + h \in]a,b[$; poiché f è crescente allora risulta $f(x+h) \geq f(x)$. Valutando il rapporto incrementale di f in x si ha quindi $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$, da cui, passando al limite per h che tende a 0 e utilizzando la conseguenza del teorema della permanenza del segno, si ha $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Poiché la funzione è derivabile in x il precedente limite è proprio la derivata di f in x e quindi $f'(x) \geq 0$.
Supponiamo ora che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a,b[$. Scelti arbitrariamente x_1, $x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$, consideriamo la funzione f ristretta alle sole x appartenenti all'intervallo $[x_1, x_2]$. Poiché in tale intervallo sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange, allora esisterà un punto $x_o \in]x_1, x_2[$ tale che $f'(x_o) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Ma per ipotesi risulta $f'(x_o) \geq 0$ e dunque $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Poiché $x_2 - x_1 > 0$, ne segue che $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, cioè $f(x_1) \leq f(x_2)$ e quindi la funzione è crescente. La ii) si prova in modo simile. $\bullet$

Ci si può chiedere cosa succede quando la condizione $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) del precedente teorema viene sostituita da una disuguaglianza stretta: in particolare se questa nuova condizione è equivalente alla stretta crescenza (decrescenza) della funzione f. La risposta è negativa. Si pensi nuovamente alla funzione $f(x) = x^3$ che pur essendo strettamente crescente nell'intervallo $[-1, 1]$, ad esempio, ha qui una derivata prima maggiore o uguale a 0 in quanto questa si annulla in $x = 0$.
Tuttavia vale il seguente teorema.

Teorema 4.7 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora*

i) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in]a,b[\quad\Rightarrow\quad$ *f è strettamente crescente in $[a,b]$*

ii) $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in]a,b[\quad\Rightarrow\quad$ *f è strettamente decrescente in $[a,b]$.* $\bullet$

Il precedente teorema fornisce dunque un'utile strumento per determinare gli intervalli in cui una funzione f risulta strettamente crescente o strettamente decrescente.

Sappiamo che una funzione costante ha derivata nulla in ogni punto. Ma vale anche il viceversa, cioè se una funzione ha derivata nulla allora possiamo dire che essa è costante? La risposta è in generale negativa se non si fanno ipotesi ulteriori sul dominio della funzione.

Teorema 4.8 *(Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo) Una funzione f è costante in un intervallo $[a, b]$ se e solo se è derivabile in $[a, b]$ e la derivata è ovunque nulla.*

Dimostrazione - Se la funzione f è costante in un intervallo $[a, b]$ allora la sua derivata è ovunque nulla. Viceversa se f è una funzione derivabile in $[a, b]$ e la sua derivata è nulla, allora per il criterio di monotonia la funzione sarebbe contemporaneamente crescente e decrescente. Le uniche funzioni che soddisfano contemporaneamente queste due condizioni sono le funzioni costanti. Dunque f è costante in $[a, b]$. •

Vediamo ora come lo studio della monotonia di una funzione possa essere utilizzato per determinare i punti di minimo e massimo relativo di una funzione. Dal teorema di Fermat abbiamo visto come non tutti i punti che annullano la derivata prima danno luogo a punti di minimo o di massimo relativo. Di conseguenza abbiamo bisogno di un test che ci dica se in un certo punto la funzione f ammette o no un punto di minimo o di massimo relativo.
Facciamo alcune considerazioni considerando prima il caso di un punto di minimo relativo. Se x_o è un punto di minimo relativo interno per f, allora per definizione esisterà un $\delta > 0$ tale che $f(x_o) \leq f(x_o + h) \quad \forall\, h \ : \ |h| < \delta$. Se valutiamo il rapporto incrementale di f nel punto x_o, dire che x_o è un punto di minimo equivale dunque a richiedere che esiste un $\delta > 0$ tale che

$$(1) \qquad \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se} \quad -\delta < h < 0 \\ \geq 0 & \text{se} \quad 0 < h < \delta \end{cases} .$$

Supponiamo ora che x_o sia un punto di massimo relativo interno per f. In questo caso, sempre in base alla definizione, dovrà esistere un $\delta > 0$ tale che $f(x_o) \geq f(x_o+h) \quad \forall\, h \ : \ |h| < \delta$. Se valutiamo il rapporto incrementale di f nel punto x_o, dire che esso è un punto di massimo relativo equivale allora a richiedere che esista un $\delta > 0$ tale che

$$(2) \qquad \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \begin{cases} \geq 0 & \text{se} \quad -\delta < h < 0 \\ \leq 0 & \text{se} \quad 0 < h < \delta \end{cases} .$$

Dopo aver fatto queste considerazioni, vediamo come lo studio del segno della funzione derivata prima possa esserci utile nella determinazione dei punti di minimo e massimo relativo interni della funzione f. Le considerazioni fatte legano la definizione di questi punti con il segno del rapporto incrementale in un opportuno loro intorno. Sappiamo anche che il rapporto incrementale è legato alla derivata prima della funzione e il suo segno, in base al Teorema 4.7, alla stretta monotonia della funzione stessa. Studiamo dunque il segno di $f'(x)$.

Supponiamo che in un intorno di un punto x_o tale derivata risulti negativa prima di x_o e positiva dopo x_o (in base al Teorema 4.7 questo vuol dire che prima di x_o la funzione è strettamente decrescente e dopo x_o la funzione è strettamente crescente). Dal teorema della permanenza del segno si deduce che in quest'intorno anche il rapporto incrementale sarà negativo prima di x_o e positivo dopo x_o. Ma questo vuol dire che è verificata la (1) e quindi x_o è un punto di minimo relativo per f.

Se invece accade che in un intorno di x_o la derivata risulta positiva prima di x_o e nagativa dopo x_o (in base al Teorema 4.7 questo vuol dire che prima di x_o la funzione è strettamente crescente e dopo x_o la funzione è strettamente decrescente), allora, sempre per il teorema della permanenza del segno, anche il rapporto incrementale sarà positivo prima di x_o e negativo dopo x_o. In questo caso sarà verifica la (2) e concludiamo che x_o è un punto di massimo relativo per f.

Dunque lo studio del segno della funzione derivata prima $f'(x)$ fornisce informazioni sia sulla monotonia della funzione sia sui suoi eventuali punti di minimo e massimo relativo.

Vediamo ora come anche lo studio del segno della funzione derivata seconda $f''(x)$ possa influenzare l'andamento del grafico di f. Poiché $f''(x) = (f'(x))'$, dal criterio di monotonia sappiamo che se $f''(x)$ è positiva allora la funzione derivata prima f' è una funzione crescente. Ne segue che la pendenza della retta tangente al grafico di f aumenta al crescere di x. Se invece $f''(x)$ è negativa, allora la funzione f' è una funzione decrescente e quindi la pendenza della retta tangente al grafico di f decresce al crescere di x.

Per capire meglio questo comportamento diamo alcune definizioni.

Definizione 4.9 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $[a,b]$. Diremo che*

i) f è convessa in $[a,b]$ se $\quad f(x) \geq f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o) \qquad \forall\, x,\, x_o \in [a,b]$

ii) f è concava in $[a,b]$ se $\quad f(x) \leq f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o) \qquad \forall\, x,\, x_o \in [a,b]$. •

Geometricamente dire che una funzione è convessa equivale a richiedere che in ogni punto x_o il grafico della funzione f è al di sopra della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_o, f(x_o))$ (Fig. 7).

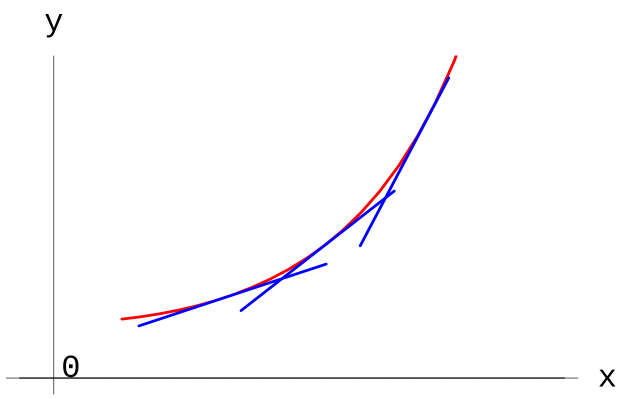


Fig. 7 f convessa

Dire invece che la funzione è concava equivale a richiedere che in ogni punto x_o il grafico della funzione f è al di sotto della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_o, f(x_o))$ (Fig. 8).

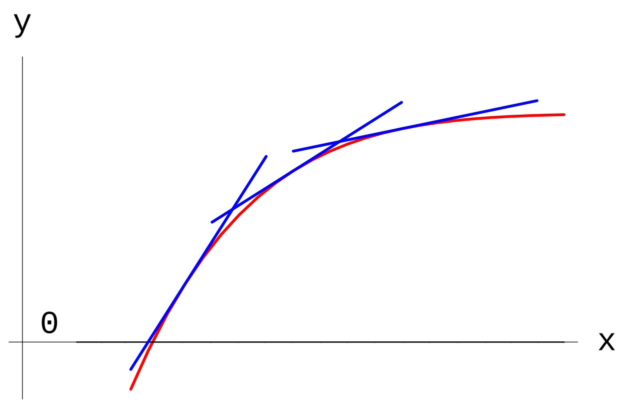


Fig. 8 f concava

La precedente definizione è legata dunque alla pendenza della retta tangente che abbiamo visto essere legata al segno della derivata seconda. Questo è quello che esprime il seguente teorema.

Teorema 4.10 *(Criterio di convessità) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $[a, b]$ e derivabile due volte in $]a, b[$. Allora*

i) f è convessa in $[a, b]$ $\quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in]a, b[$

ii) f è concava in $[a, b]$ $\quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in]a, b[$. •

Capitolo VII
Calcolo integrale

1 Integrale definito

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Dire che la funzione f è limitata equivale a dire che il suo insieme delle immagini è un insieme limitato. Dunque se f è limitata, esisteranno $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Supponiamo dunque che la funzione f sia limitata nell'intervallo $[a, b]$.

Chiameremo partizione $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[a, b]$, un insieme ordinato di $n + 1$ punti distinti $x_o, x_1, \cdots, x_n$ dell'intervallo $[a, b]$ tali che $a = x_o < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Gli $n + 1$ punti individuano n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$ con $k = 1, \cdots, n$. Per ogni $k = 1, \cdots, n$, poniamo $m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Tali numeri risultano reali in quanto f è limitata.

Chiameremo somma integrale inferiore di f relativa alla partizione $\mathcal{P}$ la quantità

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

e chiameremo somma integrale superiore di f relativa alla partizione $\mathcal{P}$ la quantità

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \,.$$

Se la funzione f è positiva in $[a, b]$, allora le somme integrali inferiore e superiore hanno un chiaro significato geometrico. Infatti in questo caso $s(\mathcal{P})$ rappresenta la somma delle aree di n rettangoli inscritti tra il grafico di f e l'asse delle ascisse: ciascuno di tali rettangoli, al variare di k tra 1 e n, ha per base l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ e per altezza m_k. La quantità $S(\mathcal{P})$ rappresenta invece la somma delle aree di n rettangoli circoscritti al grafico di f: tali rettangoli hanno, al variare di k tra 1 e n, per base sempre l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ ma per altezza la quantità M_k (Fig.1 - Fig. 2).

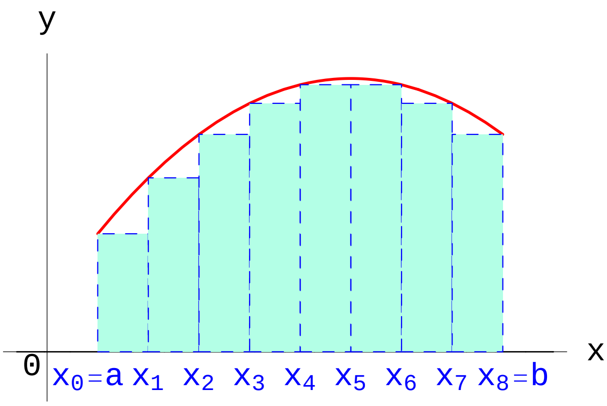


Fig. 1 $s(\mathcal{P})$

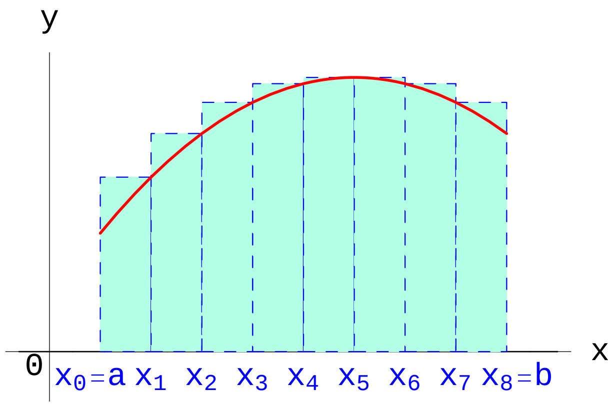


Fig. 2 $S(\mathcal{P})$

È evidente che, relativamente alla stessa partizione $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[a, b]$, risulta $s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P})$ in quanto su ciascun intervallino $[x_{k-1}, x_k]$ risulta $m_k \leq M_k$. Ci si può allora chiedere cosa succede alle somme integrali inferiore e superiore quando si considerano due partizioni distinte $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dell'intervallo $[a, b]$. Quello che accade è che le somme integrali inferiori continuano ad essere sempre più piccole delle somme integrali superiori. Più precisamente vale il seguente lemma.

Lemma 1.1 *Siano $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Allora comunque si scelgano due partizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dell'intervallo $[a, b]$ risulta*

$$m\,(b-a) \leq s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{Q}) \leq M\,(b-a)\,. \quad \bullet$$

Consideriamo gli insiemi

$$(1) \qquad A = \{s(\mathcal{P})\,|\,\mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b]\} \qquad\qquad B = \{S(\mathcal{Q})\,|\,\mathcal{Q} \text{ partizione di} [a,b]\}\,.$$

Dal precedente lemma si deduce che tali insiemi sono separati, cioè ogni elemento di A è minore o uguale di ogni elemento di B. Dall'assioma di completezza segue che esiste almeno un elemento di separazione tra i due insiemi.

Definizione 1.2 *Diremo che la funzione f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se gli insiemi A e B definiti dalla (1), ammettono un unico elemento di separazione. Tale elemento di separazione si indica con il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ e si chiama integrale definito di f in $[a, b]$.* $\bullet$

L'integrale definito di una funzione ha un notevole significato geometrico se la funzione f è positiva in $[a, b]$. Abbiamo visto che data una qualsiasi partizione $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[a, b]$, la quantità $s(\mathcal{P})$ rappresenta l'area di un plurirettangolo (cioè un insieme costituito dall'unione di rettangoli) contenuto nell'insieme $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, b] \quad 0 \le y \le f(x)\}$, mentre $S(\mathcal{P})$ rappresenta l'area di un plurirettangolo contenente T. All'aumentare del numero n dei punti che individuano la partizione $\mathcal{P}$ le aree dei plurirettangoli inscritti e circoscritti all'insieme T, tendono ad approssimare sempre di più l'area di T. Se la funzione è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, allora l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ rappresenta esattamente l'area di T.

Spesso è utile considerare l'integrale definito anche quando il primo estremo di integrazione è maggiore o uguale al secondo estremo di integrazione. In questo caso poniamo per definizione

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \qquad\qquad \int_a^a f(x)\, dx = 0\,.$$

2 Proprietà dell'integrale definito

Esaminiamo alcune importanti proprietà dell'integrale definito.

Teorema 2.1 *(Additività dell'integrale rispetto all'intervallo) Siano a, b, c tre punti di un intervallo chiuso e limitato dove la funzione f risulta integrabile. Allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,. \quad \bullet \tag{1}$$

Quando la funzione f è positiva, e quindi quando l'integrale definito viene interpretato come area di una certa regione piana, il precedente teorema ha un chiaro significato geometrico. Esaminiamo alcuni casi. Supponiamo che risulti $a < c < b$; allora l'integrale a primo membro della (1) rappresenta l'area della regione $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, b] \quad 0 \le y \le f(x)\}$, mentre gli integrali a secondo membro della (1) rappresentano rispettivamente le aree delle regioni $T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, c] \quad 0 \le y \le f(x)\}$ e $T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [c, b] \quad 0 \le y \le f(x)\}$. Il Teorema 2.1 afferma in questo caso che l'area dell'insieme T è uguale alla somma delle aree delle regioni T_1 e T_2 (Fig. 3 - Fig. 4).

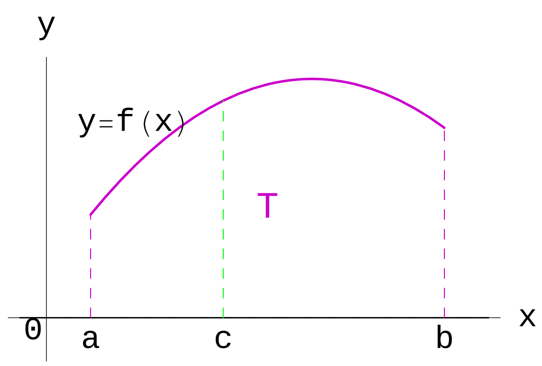


Fig. 3

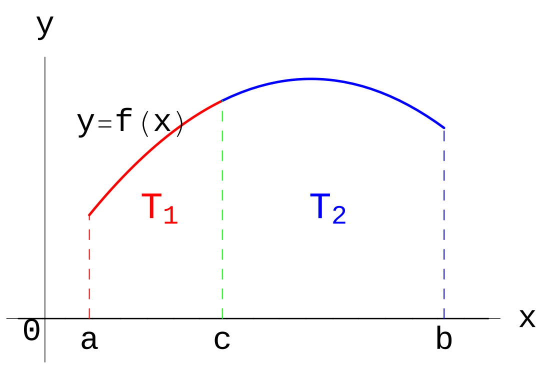


Fig. 4

Supponiamo ora che risulti $a < b < c$; in questo caso l'integrale a primo membro della (1) rappresenta sempre l'area della regione T e il primo integrale a secondo membro della (1) rappresenta l'area della regione T_1. Per quanto riguarda l'integrale $\int_c^b f(x)\,dx$, essendo $b < c$, dalla definizione di integrale risulta $\int_c^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx$ e quindi esso corrisponde all'opposto dell'area della regione $T_2' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [b,c] \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$. In questo caso il Teorema 2.1 afferma che l'area di T è data dalla differenza delle aree di T_1 e di T_2' (Fig. 5 - Fig. 6).

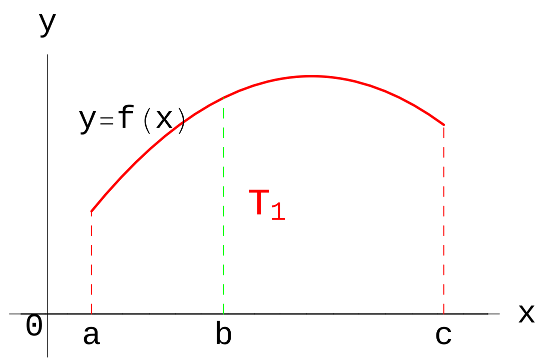


Fig. 5

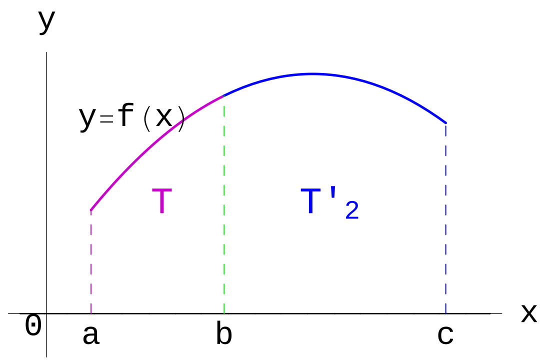


Fig. 6

Teorema 2.2 *(Linearità dell'integrale) Siano f e g due funzioni integrabili in $[a,b]$ e sia $c \in \mathbb{R}$, allora anche le funzioni $f+g$ e $c \cdot f$ sono integrabili in $[a,b]$ e risulta*

$$\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad\qquad \int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx\,. \quad \bullet$$

Abbiamo sin'ora analizzato la definizione e alcune importanti proprietà delle funzioni integrabili, ma ancora non abbiamo individuato un modo semplice per poter stabilire se, data una funzione limitata su un intervallo $[a,b]$, essa è integrabile secondo Riemann su tale intervallo. A tale scopo risulta molto utile il seguente teorema.

Teorema 2.3 *(Integrabilità delle funzioni continue) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.* $\bullet$

Il precedente teorema ci permette quindi di individuare una classe molto ampia di funzioni integrabili. Ovviamente le funzioni continue godono di proprietà particolari e quindi ciò ci suggerisce che anche gli integrali delle funzioni continue godono di particolari proprietà.

Teorema 2.4 *(Teorema della media) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste un punto $x_o \in [a,b]$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = f(x_o) \cdot (b-a)$.*

Dimostrazione - Sappiamo che, essendo f continua, allora essa è integrabile in $[a, b]$; inoltre, per definizione, sappiamo che l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ è l'elemento di separazione degli insiemi delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori al variare della partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$. Dunque, per ogni partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$ si ha

$$s(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S(\mathcal{P})\,. \tag{2}$$

D'altra parte, per il Lemma 1.1, risulta anche

$$m\,(b-a) \leq s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq M\,(b-a)\,, \tag{3}$$

dove $m, M \in \mathbb{R}$ sono tali che $m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a, b]$. Così dalle (2) e (3) segue

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b-a)\,,$$

da cui

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,. \tag{4}$$

Poiché la f è continua in $[a, b]$, allora m e M possono essere scelti come il minimo e il massimo della funzione in $[a, b]$ (che esistono in base al Teorema di Weierstrass). Così dalla (4) il numero $y_o = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ risulta un numero reale compreso tra due valori assunti dalla funzione f. Dal Teorema del valor medio segue dunque che esiste $x_o \in [a, b]$ tale che $f(x_o) = y_o$ cioè $f(x_o) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ e il teorema è così dimostrato. •

3 Integrale indefinito

Abbiamo individuato nelle funzioni continue un'ampia classe di funzioni integrabili secondo Riemann ma, oltre alla definizione, non abbiamo ancora individuato un modo semplice per calcolarli. Vedremo ora come il concetto di integrale è in qualche modo legato a quello di derivata.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni $x \in [a, b]$ consideriamo la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,. \tag{1}$$

Tale funzione è chiamata funzione integrale. Per ogni $x \in [a, b]$ essa risulta ben definita a causa della continuità di f e inoltre rappresenta l'integrale definito di f nell'intervallo $[a, x]$.

Teorema 3.1 *(Teorema fondamentale del calcolo integrale) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la funzione integrale $F(x)$ definita dalla (1) risulta derivabile in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$.*

Dimostrazione - Fissiamo $x \in [a,b]$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sufficientemente piccolo in modo che $x+h \in [a,b]$. Valutiamo il rapporto incrementale di F in x. Per l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo, risulta

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big] = \tag{2}$$

$$\frac{1}{h}\Big[\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

All'ultimo integrale nella (2) vogliamo applicare il Teorema della media. Vi sono due casi. Se $h>0$ allora, per il Teorema della media esiste un punto $x(h) \in [x, x+h]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x(h)) \cdot (x+h-x) = f(x(h)) \cdot h\,.$$

Se $h<0$ allora, utilizzando prima la definizione di integrale quando il primo estremo di integrazione è maggiore del secondo e poi il Teorema della media, si ha che esiste un punto $x(h) \in [x+h, x]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt = -f(x(h)) \cdot \big(x-(x+h)\big) = f(x(h)) \cdot h\,.$$

In ogni caso dunque, sia se $h>0$ che $h<0$, si conclude che esiste un punto $x(h)$ appartenente all'intervallo di estremi x e $x+h$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x(h)) \cdot h\,. \tag{3}$$

Così dalle (2) e (3) segue che

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x(h))\,. \tag{4}$$

Poiché $x(h)$ è compreso tra x e $x+h$, si ha che $\lim_{h\to 0} x(h) = x$ e quindi, passando al limite per h che tende a 0 nella (4), si ha

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x)$$

a causa della continuità di f. •

Definizione 3.2 *Una funzione G definita e derivabile in $[a,b]$ è chiamata primitiva di f se $G'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$.* •

Tenendo presente la definizione di primitiva e il Teorema fodamentale del calcolo integrale, possiamo dire che se f è continua in $[a,b]$ allora la funzione integrale $F(x)$ definita dalla (1) risulta una sua primitiva.

È chiaro che se $G(x)$ è una primitiva di f, allora data una qualsiasi costante $c \in \mathbb{R}$, anche la funzione $G(x) + c$ risulta una primitiva di f. Infatti, ovviamente $G(x) + c$ è derivabile in $[a,b]$ e poi $(G(x) + c)' = G'(x) = f(x)$. Ci si può chiedere se vale anche il viceversa, cioè se, una volta nota una primitiva $G(x)$ di f, si riescono a conoscere tutte le altre primitive di f. Questo è quello che esprime il seguente lemma.

Lemma 3.3 *(Caratterizzazione delle primitive in un intervallo) Siano $F(x)$ e $G(x)$ due primitive di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$.*

Dimostrazione - Per ogni $x \in [a,b]$ poniamo $H(x) = G(x) - F(x)$. Evidentemente H risulta derivabile nell'intervallo $[a,b]$ e

$$H'(x) = \big(G(x) - F(x)\big)' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Così dalla caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo segue che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $H(x) = c$, cioè $G(x) = F(x) + c$. •

Dal Lemma 3.3 e dal Teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo allora dedurre una formula che ci permette di calcolare gli integrali definiti in modo semplice una volta nota una primitiva della funzione di cui si vuole calcolare l'integrale.

Teorema 3.4 *(Formula fondamentale del calcolo integrale) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $G(x)$ una sua primitiva. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)\,.$$

Dimostrazione - Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che anche la funzione integrale $F(x)$ definita dalla (1) è una primitiva di f. Così dal Lemma 3.3 segue che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{5}$$

Valutando la (5) per $x = a$ si ottiene

$$G(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c = c\,,$$

e quindi valutando la (5) per $x = b$ si deduce che

$$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c = \int_a^b f(x)\,dx + G(a)\,,$$

da cui la tesi. $\bullet$

Con la Formula fondamentale del calcolo integrale ci si è ricondotti a calcolare un integrale definito di una funzione continua attraverso la ricerca delle sue primitive. Nasce quindi spontaneo dare una nuova definizione.

Definizione 3.5 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. L'insieme di tutte le sue primitive in $[a, b]$ si chiama integrale indefinito e si indica con il simbolo $\int f(x)\,dx$.* $\bullet$

In base alla caratterizzazione delle primitive in un intervallo, possiamo affermare che se $F(x)$ è una primitiva di f, allora risulta $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ dove c è una costante arbitraria.

4 Calcolo di integrali indefiniti

A partire dalle derivate di alcune funzioni elementari, è possibile dedurre una serie di integrali indefiniti immediati.

i) $\int x^b\,dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c \qquad \forall\, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ii) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

iii) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + c$

iv) $\int e^x\,dx = e^x + c$

v) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

vi) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

vii) $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$

viii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

ix) $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c\,.$

Le formule precedenti possono essere generalizzate utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte. Si ottengono così le seguenti ulteriori tabelle di integrazione immediata.

i) $\int [f(x)]^b \cdot f'(x)\, dx = \frac{\left[f(x)\right]^{b+1}}{b+1} + c \qquad \forall\, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ii) $\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \log |f(x)| + c$

iii) $\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$

iv) $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$

v) $\int \sin f(x) \cdot f'(x)\, dx = -\cos f(x) + c$

vi) $\int \cos f(x) \cdot f'(x)\, dx = \sin f(x) + c$

vii) $\int \frac{1}{(\cos f(x))^2} \cdot f'(x)\, dx = \tan f(x) + c$

viii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)\, dx = \arcsin f(x) + c$

if(x)) $\int \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)\, dx = \arctan f(x) + c\,.$

Ricordando che la derivata di una somma è la somma delle derivate e che la derivata del prodotto di una costante per una funzione è pari al prodotto della costante per la derivata della funzione, anche per gli integrali indefiniti vale la proprietà di linearità e quindi

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \qquad \int c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx \qquad (c \in \mathbb{R})\,.$$

Il seguente metodo di integrazione si basa invece sulla regola di integrazione del prodotto di funzioni.

Teorema 4.1 *(Formula di integrazione per parti) Siano f e g due funzioni derivabili con derivata prima continua in un intervallo $[a, b]$. Allora risulta*

$$\int \Big(f(x) \cdot g'(x)\Big)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int \Big(f'(x) \cdot g(x)\Big)\, dx\,. \quad \bullet$$

Tenendo presente il legame tra gli integrali indefiniti e quelli definiti, espresso dalla Formula fondamentale del calcolo integrale, è possibile scrivere una formula di integrazione per parti anche per gli integrali definiti:

$$\int_a^b \Big(f(x)\cdot g'(x)\Big)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b \Big(f'(x)\cdot g(x)\Big)\,dx\,,$$

dove con il simbolo $[f(x)\cdot g(x)]_a^b$ si vuole indicare la differenza dei valori della funzione $f(x)\cdot g(x)$ per $x = b$ e per $x = a$.

Dalla formula di derivazione delle funzioni composte segue infine la seguente regola di integrazione.

Teorema 4.2 *(Formula di integrazione per sostituzione) Sia f una funzione continua e sia g una funzione derivabile con derivata continua. Allora risulta*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,\cdot\,g'(t)\,dt \qquad (x = g(t))\,. \quad \bullet$$

Anche in questo caso è possibile scrivere la formula di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti. Supponiamo che f sia definita nel'intervallo $[a, b]$ ed effettuiamo la sostituzione $x = g(t)$. Supponiamo che ad $x = a$ e a $x = b$ corrispondano, con questa sostituzione, i valori $t = c$ e $t = d$, cioè supponiamo che risulti $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,\cdot\,g'(t)\,dt \qquad (x = g(t))\,.$$